RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 febbraio 1919.

A. Rôiti, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Meccanica. — *Sopra certi problemi dinamici sul piano.* Nota II di A. Del Re, presentata dal Socio V. Volterra.

1. Nella precedente Nota (1) relativa all'argomento di cui nel titolo, mi occupai dei problemi dinamici sul piano cui può competere un integrale frazionario a termini lineari nelle componenti x', y' della velocità del punto (x, y), nella supposizione del Bertrand secondo la quale (col linguaggio delle convenzioni e definizioni stabilite in quella Nota, e che seguiremo qui, senz'altro aggiungere), nel determinante H dell'omografia *coordinata* a quell'integrale, le due prime orizzontali g, k, l ; g', k', l' non siano composte di elementi proporzionali (2); mettendo in rilievo non dovere essere, per la giustezza delle nostre conclusioni, in alcun modo degenere quell'omografia, cioè non dovere, in alcun modo essere $H = 0$. Questa condizione di cose portò seco che *non si poterono identificare tutti i problemi cui si riferisce l'integrale supposto con tutti i problemi di moti liberi per sezioni coniche, e per forze centrali, o parallele*; poichè ne rimasero esclusi *quelli per parabole sotto l'azione di forze costanti in grandezza e direzione* (es., cadute dei gravi lanciati in un campo gravitazionale newtoniano), e *quelli per una conica qualunque sotto l'azione di forze dirette verso*

(1) Cfr. questi medesimi Rend., vol. XXVIII, 1° sem., 1919, pag. 65.

(2) Cfr. la Memoria, *Sur quelques-unes des formes* etc., Liouville, 2ª serie, tomo II, pag. 136; e pag. 137, form. (4), (5) e segg.

un punto della curva, proporzionate direttamente alla distanza da esso ed inversamente al cubo della distanza dalla tangente nel punto. E questi ultimi problemi costituiscono effettivamente un gruppo a parte nei riguardi del dato integrale, poichè possono riguardarsi come aggregati a quei primi soltanto in quantochè l'integrale stesso, verificandosi il caso escluso dal Bertrand, viene a prendere la *forma intiera*, e, come tale, a confondersi con l'*integrale delle aree*, comune a tutti i moti per forze centrali (in caso limite, per forze parallele); ed in quantochè anche essi presentano, nella loro totalità, il carattere d'*invarianza* rispetto a tutte le collineazioni di Appell del piano.

2. Nel caso escluso dal Bertrand, adoperando le medesime notazioni di lui, l'integrale dato può porsi nella forma

$$(1)\qquad \alpha = [(k + lx)\,y' + (g + mly)\,x' + \mathrm{R}] \times \\ \times [(k' + l'x)\,y' + (g' + ml'y)\,x' + \mathrm{C}]^{-1},$$

m essendo un numero scelto a piacere. Allora, posto

$$(2)\qquad g' : g = k' : k = l' : l = \varrho,$$

si avrà

$$(1')\qquad \varrho\alpha = [(k + lx)\,y' + (g + mlx)\,x' + \mathrm{R}] \times \\ \times \left[(k + lx)\,y' + (g + lmx)\,x' + \frac{\mathrm{C}}{\varrho}\right]^{-1};$$

d'onde, indicando ancora con α la nuova costante $\frac{1}{2\varrho}\,\frac{\varrho\alpha + 1}{\varrho\alpha - 1}$, e ponendo

$$\frac{\nu}{\mathrm{R}\varrho - \mathrm{C}} = \nu_1 \quad (\nu = g, k, l) \quad , \quad \frac{\mathrm{R}\varrho + \mathrm{C}}{\mathrm{R}\varrho - \mathrm{C}} = \mathrm{R}_1 :$$

$$(3)\qquad \alpha = (k_1 + l_1 x)\,y' + (g_1 + ml_1 y)\,x' + \mathrm{R}_1$$

l'integrale viene ad avere la forma intiera. Da quanto venne stabilito dallo stesso Bertrand [loc. cit., pag. 115, form. (3)], si ricava dopo brevi calcoli che dovrà essere, insieme ad $\mathrm{R}_1 = \text{cost.}$,

$$\frac{\partial}{\partial x}(g_1 + ml_1 y) = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}(k_1 + l_1 x) = 0,$$

il che implica $\mathrm{R}\varrho - \mathrm{C} = \text{cost.}$ (e conseguentemente pure $\mathrm{R}\varrho + \mathrm{C} = \text{cost.}$) e

$$\frac{\partial(g_1 + ml_1 y)}{\partial y} + \frac{\partial(k_1 + l_1 x)}{\partial x} = 0,$$

ciò che dà

$$(4)\qquad (m + 1)\,l = 0$$

dovendo essere esclusa la scelta $\varrho = \mathrm{C} : \mathrm{R}$ che trasformerebbe il 2° membro

della (1′) nella costante 1. La (4) richiede che sia $m = -1$, ovvero $l = 0$. Per $l = 0$, le (2) informano che deve essere anche $g = k = 0$, ed allora, scrivendo ancora α al posto di $l : \alpha$, in luogo della (1) troviamo

$$(3') \qquad \alpha = (k' + l'x)\, y' + (g' - l'x)\, x' + R_1',$$

cioè un integrale della forma (3) senza che la condizione $l' = 0$ porti seco $k' = g' = 0$.

Possiamo dunque supporre che alla (4) si soddisfi soltanto con $m = -1$, ed allora ne deduciamo che *la condizione* $m = -1$ *è pure necessaria quando si verifichi il caso escluso dal Bertrand* (cosa che questi non rilevò), a proposito della discussione delle form. (5) e seg. al § VIII della sua Mem. cit. Sicchè, a parte il fatto che le (3), (3′) già dicono trattarsi del noto *integrale delle aree* [e di forze centrali verso il punto $(x_0 = g_1 : l_1 = g : l \;;\; y_0 = -k_1 : l_1 = -k : l)$ se $l \neq 0$, di forze centrali verso il punto $(x_0' = -k' : l' \;,\; y_0' = g' : l')$ se $l = 0 \;,\; l' \neq 0$, o di forze parallele nella direzione $-g' : k'$ se, con $l = 0$, è $l' = 0$], noi dobbiamo ritrovare questo risultato come conseguenza dell'altro nel quale l'annullarsi di H non sia conseguenza della proporzionalità fra gli elementi delle sue due prime orizzontali.

3. Ritenuto ora $H = 0$ con esclusione delle (2), per l'integrale dato si avrà la forma

$$(5) \qquad \alpha = [(k + lx)\, y' + (g - ly)\, x' + \lambda]\, [(k' + l'x)\, y' + (g' - l'y) + \mu]^{-1},$$

dove λ, μ sono, rispettivamente, le costanti di proporzionalità fra i minori complementari degli elementi della seconda e della prima orizzontale di H ed i minori complementari della terza. In fatti, riferendosi alle espressioni per R, C riportate nella Nota I [cfr. form. (3)], poichè $G' = \lambda G'', \ldots,$ $G = \mu G'', \ldots,$ si trova per R (ed in modo analogo per C]:

$$R = \lambda (G''y - K''x + L'')\, (G''y - K''x + L'')^{-1} = \lambda,$$

e, per le componenti X, Y delle forze, le equazioni

$$(6) \qquad \begin{cases} (G''y - K''x + L'')\, X = 0 \quad , \quad (G''y - K''x + L'')\, Y = 0 \\ [\lambda(l'y - g') - \mu(ly - g)]\, X - [\lambda(l'x + k') - \mu(lx + k)]\, Y = 0 \end{cases}$$

che, nelle condizioni supposte di esclusione delle (2), restano soddisfatte soltanto dai valori $X = 0 \;,\; Y = 0$; ciò che corrisponde al caso ovvio di *moti senza forze sollecitatrici*, vale a dire di *moti rettilinei ed uniformi*. L'integrale (5), mettendo al posto di x', y' le componenti della velocità iniziale diventa la equazione della retta che rappresenta la traiettoria del mobile.

Se introduciamo le condizioni (2), per essere allora $G''=K''=L''=0$, le prime due delle (6) restano soddisfatte per qualsiasi valore delle X, Y, mentre la terza dà, se non è $l=0$:

$$(\lambda\varrho-\mu)[(ly-g)X-(lx+k)Y]=0 \quad , \quad \text{e se } l=0,$$
$$(\lambda-\mu\varrho)[(l'y-g')X-(l'x+k')Y]=0\,.$$

Perciò, tenuto conto che non può essere nè $\varrho=\mu:\lambda$, nè $\varrho=\lambda:\mu$, si avrà

$$(7)\quad \begin{cases} (ly-g)X-(lx+k)Y=0 & \text{se non è } l=0 \\ (l'y-g')X-(l'x+k')Y=0 & \text{se con } l=0, \text{ non è } l'=0 \\ g'X+k'Y=0 & \text{se con } l=0 \text{ è } l'=0\,; \end{cases}$$

ciò che concorda con quanto venne detto in fine del n. 2. Tutti i casi possibili restano così esaminati.

4. Se con la omografia di Appell (di det. $\Delta=\pm\Sigma a b' c''\neq 0$)

$$(8)\quad \begin{cases} x_1=(ax+by+c)(a''x+b''y+c'')^{-1}\,, \\ y_1=(a'x+b'y+c')(a''x+b''y+c'')^{-1}\,, \\ k\,dt_1=(a''x+b''y+c'')^{-2}\,dt \end{cases}$$

trasformano un movimento sotto l'azione della forza di componenti X, Y troviamo, come Appell ha stabilito, un movimento sotto l'azione della forza di componenti X_1, Y_1 (pure esse dipendenti, come si suppone per le X, Y, soltanto dalla posizione del mobile) date (quando siano $A, \ldots ; A', \ldots$ i min. compl. di $a, \ldots ; a', \ldots$ in Δ) dalle

$$(9)\quad \begin{cases} X_1=k^2(a''x+b''y+c'')^2[\quad C'(xY-yX)+B'X-A'Y] \\ Y_1=k^2(a''x+b''y+c'')^2[-C(xY-yX)-BX+AY]\,; \end{cases}$$

ovvero, grazie alle formule inverse delle (8) dopo brevi trasformazioni con applicazione del teorema sui minori del det. reciproco di un determ. dato

$$(10)\quad \begin{cases} X_1=\dfrac{-k^2\Delta^3}{(Cx_1+C'y_1+C'')^3}[(a''X+b''Y)x_1-(aX+bY)] \\ Y_1=\dfrac{-k^2\Delta^3}{(Cx_1+C'y_1+C'')^3}[(a''X+b''Y)y_1-(a'X+b'Y)] \end{cases}$$

dove sono ancora da esprimersi in funzione delle x_1, y_1, le X, Y. Da esse si vede che, ove introduciamo il punto

$$x_0=(aX+bY)(a''X+b''Y)^{-1} \quad , \quad y_0=(a'X+b'Y)(a''X+b''Y)^{-1},$$

questo appartiene alla retta limite $Cx_1 + C'y_1 + C'' = 0$ del sistema trasformato, poichè, evidentemente

$$Cx_0 + C'Y_0 + C'' =$$
$$= [(aC + a'C' + a''C'')\,X + (bC + b'C' + b''C'')\,Y](a''X + b''Y)^{-1} = 0;$$

epperò, ove X, Y siano le componenti d'una forza costante in grandezza e direzione, le X_1, Y_1 saranno le componenti d'una forza centrale col centro nel punto x_0, y_0, proporzionale alla distanza dal centro, ed inversamente proporzionale al cubo della distanza dalla retta $Cx_1 + C'y_1 + C'' = 0$ che passa per esso. Questa retta e quel punto sono, rispettivamente una tangente ed il relativo punto di contatto della conica trasformata della parabola percorsa dal punto mobile sotto l'azione della forza costante. Così, tenuto conto che dalle (10) con la omografia inversa delle (8) si passa di nuovo alle X, Y, nella supposizione che queste siano costanti, si arriva al risultato secondo il quale *a tutti i moti liberi su coniche, per forze centrali col centro in un punto della curva, o per forze di direzione e grandezza costante, si arriva, partendo da uno qualunque di essi, col trasformarlo per mezzo delle omografie di Appell.* E da ciò segue, allora, il carattere d'*invarianza*, per questi tipi di moti liberi, cui si è accennato in fine del n. 1.

5. Tutto quanto abbiamo esposto, in questa e nella precedente Nota, facile è riassumere in un enunciato unico che noi, per brevità, lasciamo a cura del lettore.

Matematica. — *Sul problema dell'irriducibilità di un'equazione in un campo di razionalità generale.* Nota di Pacifico Mazzoni, presentata dal Socio L. Bianchi.

1. Nella teoria che Galois pose a fondamento per la risoluzione e lo studio generale delle equazioni algebriche, si presenta questo problema:

Data un'equazione algebrica, priva di radici multiple:

$$(1) \qquad f(x) = (x - \alpha_1)\,.\,(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_m) = 0,$$

con coefficienti appartenenti a un dato campo di razionalità, vedere se e come si abbassi il suo gruppo di Galois, per l'aggiunta di una data grandezza β_1, radice di un'altra data equazione $f_1(x) = 0$.

Considerata l'equazione $f_2(x) = 0$ risolvente di Galois della proposta (1), è noto che il problema equivale a quest'altro: vedere come si scomponga $f_2(x)$ in fattori irriducibili, dopo l'aggiunta di β_1 al campo di razionalità primitivo.

Noi supporremo che le due equazioni $f(x) = 0$ e $f_1(x) = 0$ abbiano i coefficienti *numeri razionali*, e che il campo di razionalità da cui si parte sia quello dei numeri razionali, che si indica sempre con $[1]$; invece con $[\beta_1]$ indicheremo il campo ampliato, dopo l'aggiunta di β_1. Sicchè il problema di cui vogliamo occuparci è il seguente, di indole pratica, e che è fondamentale nella teoria di Galois delle equazioni e delle grandezze algebriche:

Dare dei metodi pratici per decomporre un dato polinomio a coefficienti razionali $f(x)$ in fattori irriducibili nel corpo algebrico $[\beta_1]$ (1).

A questo problema è parso sinora che avesse già risposto il Kronecker, poichè egli lo tratta nel § 4 dei suoi *Grundzüge*, dopo di aver risoluto quello di decomporre $f(x)$ nel corpo $[1]$. Qui ci proponiamo di dimostrare che quel metodo dato dal Kronecker per decomporre $f(x)$ in fattori irriducibili nel corpo $[\beta_1]$ è *inesatto*, e in generale non risolve affatto il problema proposto; sicchè *il detto problema rimaneva, sino ad oggi, per quanto è a nostra conoscenza, insoluto.* Noi qui lo risolveremo, modificando opportunamente lo stesso metodo del Kronecker.

Ricordiamo prima quale è quel metodo. Posto $x = z + \lambda\beta_1$, con λ numero razionale indeterminato, e posto, per brevità, $f(z + \lambda\beta_1) = F(z_1, \beta_1)$, si supponga che

$$(2) \qquad F_1(z, \beta_1) ; F_2(z, \beta_1) ; \ldots ; F_t(z, \beta_1)$$

siano i fattori irriducibili cercati di $F(z, \beta_1)$ in $[\beta_1]$. Supposto inoltre $f_1(x)$ già irriducibile in $[1]$, si dicano $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ le sue radici, coniugate di β_1 rispetto a $[1]$. Si formi il quadro

$$(3) \qquad \begin{cases} f(z + \lambda\beta_1) = F(z, \beta_1) = F_1(z, \beta_1) \cdot F_2(z, \beta_1) \ldots F_t(z, \beta_1) ; \\ f(z + \lambda\beta_2) = F(z, \beta_2) = F_1(z, \beta_2) \cdot F_2(z, \beta_2) \ldots F_t(z, \beta_2) ; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f(z + \lambda\beta_n) = F(z, \beta_n) = F_1(z, \beta_n) \cdot F_2(z, \beta_n) \ldots F_t(z, \beta_n) . \end{cases}$$

Si eseguisca il prodotto delle funzioni che si trovano in una stessa colonna di questo quadro. Posto

$$\Phi(z) = F(z, \beta_1) \cdot F(z, \beta_2) \ldots F(z, \beta_n), \text{ e } \varphi_i(z) = F_i(z, \beta_1) \cdot F_i(z, \beta_2) \ldots F_i(z, \beta_n),$$

per $i = 1, 2, \ldots, t$, le funzioni $\Phi(z), \varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_t(z)$ saranno tutte a coefficienti razionali, che si trovano con dei calcoli di funzioni simmetriche. Si decomponga $\Phi(z)$ in fattori irriducibili in $[1]$: ciò che si sa fare. Per fissar le idee, si supponga infine che $\alpha_1 + \lambda\beta_1$ sia una radice di

(1) Per quanto riguarda le denominazioni che usiamo, seguiamo il Weber, nel suo trattato, *Algèbre supérieure*, 1898.

Per es., ricordiamo che si chiamano *coniugate* le radici d'un'equaz. *irriducibile.*

$F_1(z, \beta_1)$, e che $\theta_1(z)$ sia un fattore irriducibile di $\Phi(z)$ avente quella radice. Giunto a questo punto, il Kronecker così prosegue:

« *Il massimo comune divisore tra* $F(z, \beta_1)$ *e questo fattore* $\theta_1(z)$ *ci* « *dà il polinomio cercato* $F_1(z, \beta_1)$; analogamente per gli altri fattori: « trovati così questi fattori (2) di $f(z + \lambda\beta_1)$, irriducibili in $[\beta_1]$, si tro- « vano poi subito da essi i fattori di $f(x)$ irriducibili in $[\beta_1]$, sostituendo « in essi di nuovo $x - \lambda\beta_1$ al posto di z. È poi da notare che la sostitu- « zione di $z + \lambda\beta_1$ al posto di x è fatta col fine di far comparire effetti- « vamente β_1 nei coefficienti ».

2. Orbene osserviamo che in generale *non è esatto che*, ad esempio, $F_1(z, \beta_1)$ sia *sempre* il massimo comune divisore dei due polinomi $F(z, \beta_1)$ e $\theta_1(z)$: in generale esso è soltanto un loro divisore comune, e per convincerci di ciò, lo vediamo subito con un esempio (1).

Prendiamo un polinomio $G(x)$ *irriducibile* in $[1]$, e diciamo

$$F_1(z, \beta_1) \; ; \; F_2(z, \beta_1) \; ; \; \ldots \; ; \; F_r(z, \beta_1) \tag{4}$$

i suoi fattori irriducibili in $[\beta_1]$, e poniamo che sia $r \geq 3$ (2). Detto poi t un numero ≥ 2, e $< r$, poniamo

$$F(z, \beta_1) = F_1(z, \beta_1) \cdot F_2(z, \beta_1) \ldots F_t(z, \beta_1), \tag{5}$$

dimodochè $F(z, \beta_1)$ conterrà effettivamente β_1 nei suoi coefficienti, e le radici di $F(z, \beta_1) = 0$ saranno tutte coniugate tra loro rispetto a $[1]$, poichè tali sono quelle di $G(x) = 0$. Poniamo $z = x - \lambda\beta_1$, e consideriamo la funzione

$$F(z, \beta_1) = F(x - \lambda\beta_1, \beta_1).$$

(1) Basta pensare che $F_2(z, \beta_1)$ può avere qualche radice comune, per esempio, con $F_1(z, \beta_2)$, perchè si presenti subito il dubbio sull'affermazione di Kronecker.

(2) Se ne potranno certamente costruire di tali polinomi irriducibili in $[1]$, che in un corpo $[\beta_1]$ si scindano in più di due fattori irriducibili. Basta prendere infatti una equazione razionale in $[1]$:

$$f(z) = (z - \alpha_1) \cdot (z - \alpha_2) \ldots (z - \alpha_m) = 0,$$

avente per gruppo di Galois il gruppo totale sulle sue radici. Considerata la sostituzione

$$S = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) \cdot (\alpha_{\mu+1}, \ldots, \alpha_\nu) \cdot (\alpha_{\nu+1}, \ldots, \alpha_m),$$

si indichi con Γ il gruppo generato dalle potenze di S, e si dica β_1 un elemento del corpo $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m]$ che abbia per sottogruppo numerico Γ. Rispetto al corpo $[\beta_1]$ il gruppo di Galois di $f(z) = 0$ sarà ridotto a Γ, e $f(z)$ si scinderà nei tre fattori irriducibili

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_\mu) \; ; \; (x - \alpha_{\mu+1}) \ldots (x - \alpha_\nu) \; ; \; (x - \alpha_{\nu+1}) \ldots (x - \alpha_m).$$

Analogamente se si vogliono più di tre fattori irriducibili.

Partiamo ora da questa funzione $F(x - \lambda\beta_1 , \beta_1)$; sostituendo in essa la quantità $z + \lambda\beta_1$ al posto di x, si ottiene precisamente $F(z , \beta_1)$. Questa funzione si decomporrà in fattori irriducibili secondo la (5); si potrà formare il quadro analogo al (3). Siccome le radici dei varî fattori $F_i(z , \beta_1)$, per $i = 1 , 2 , \dots t$, sono coniugate rispetto a $[1]$, esse soddisferanno tutte all'equazione irriducibile $\theta_1(z) = 0$, e perciò il prodotto $F(z , \beta_1)$ è contenuto in $\theta_1(z)$: vale a dire che *il massimo comune divisore a* $F(z , \beta_1)$ *e a* $\theta_1(z)$ *sarà* $F(z , \beta_1)$ *stesso*, e non sarà $F_1(z , \beta_1)$: ciò che dimostra che è errata l'affermazione del Kronecker che il detto massimo comune divisore sia proprio il polinomio irriducibile richiesto $F_1(z , \beta_1)$. Dunque col suo metodo non si può decomporre questa funzione $F(z , \beta_1)$ in fattori irriducibili in $[\beta_1]$.

E se $\Psi(x)$ è un polinomio razionale in $[1]$ che contenga $F(x - \lambda\beta_1 , \beta_1)$, posto:

$$\Psi(x) = \Psi(z + \lambda\beta_1) = \Theta(z , \beta_1) ,$$

questo polinomio $\Theta(z , \beta_1)$ conterrà $F(z , \beta_1)$; e siccome per quest'ultimo il metodo di Kronecker non è valido, neppure il polinomio dato $\Psi(x)$ *non si potrà decomporre* con quel metodo in fattori irriducibili in $[\beta_1]$.

3. Ora vogliamo modificare il metodo di Kronecker, in modo da renderlo valido. Dimostriamo che:

Se $f(x)$ *è irriducibile in* $[1]$, *allora il detto metodo è valido, cioè allora il massimo comune divisore tra* $F(z , \beta_1)$ *e* $\theta_1(z)$ *è veramente* $F_1(z , \beta_1)$.

Infatti siano $\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_m$ le radici della (1): siccome $z = x + \lambda\beta_1$, le radici di $F(z , \beta_1) = 0$ saranno le seguenti:

$$\alpha_i + \lambda\beta_1 . \quad \text{per} \quad i = 1 , 2 , \dots , m .$$

Se dimostriamo che due di queste radici non sono coniugate rispetto a $[1]$, se non lo sono rispetto a $[\beta_1]$, seguirà che il prodotto

$$F_2(z , \beta_1) . F_3(z , \beta_1) \dots F_t(z , \beta_1)$$

non ha radici comuni col fattore irriducibile $\theta_1(z)$, il quale ammette come radici tutte le coniugate di $\alpha_1 + \lambda\beta_1$ rispetto a $[1]$; cioè seguirà che $F_1(z , \beta_1)$ è il massimo comune divisore tra $F(z , \beta_1)$ e $\theta_1(z)$.

Supponiamo che $\alpha_i + \lambda\beta_1$ sia coniugata di $\alpha_1 + \lambda\beta_1$ rispetto a $[1]$; vi sarà una sostituzione S del corpo normale $[\alpha_1 , \alpha_2 , \dots , \alpha_m , \beta_1 , \dots , \beta_n]$ che porterà $\alpha_1 + \lambda\beta_1$ in $\alpha_i + \lambda\beta_1$. Si vede subito che la S porterà α_1 in α_i e β_1 in β_1 stessa [1]; cioè la S lascerà ferma β_1, e sarà una sostituzione

[1] Se la S porta α_1 in α_1', e β_1 in β_1', deve essere $\alpha'_1 + \lambda\beta'_1 = \alpha_i + \lambda\beta_1$; donde, siccome λ è un numero indeterminato, e le quantità $\alpha_r + \lambda\beta_s$ sono tutte distinte, segue che deve essere $\alpha_1' = \alpha_i$, e $\beta_1' = \beta_1$.

del suddetto corpo normale *rispetto a* $[\beta_1]$; perciò $\alpha_i + \lambda\beta_1$ sarà coniugata di $\alpha_1 + \lambda\beta_1$ *rispetto a* $[\beta_1]$ come campo fondamentale. Dunque $\alpha_i + \lambda\beta_1$ non è coniugata di $\alpha_1 + \lambda\beta_1$ rispetto a $[1]$, se non lo è pure rispetto a $[\beta_1]$, cioè se non appartiene allo stesso fattore $F_1(x, \beta_1)$, cui appartiene l'altra. C. d. d. Dunque se $f(x)$ è irriducibile in $[1]$, allora il massimo comune divisore a $F(z, \beta_1)$ e a $\theta_1(z)$ è proprio il fattore richiesto $F_1(z, \beta_1)$. E siccome ciò che si è detto per il primo fattore $F_1(z, \beta_1)$ vale anche per gli altri, segue il teorema finale:

Se $f(x)$ *è irriducibile in* $[1]$, *allora per esso vale il metodo del Kronecker, per decomporlo in fattori irriducibili in* $[\beta_1]$. *Se invece* $f(x)$ *è riducibile in* $[1]$, *allora basta decomporlo prima in fattori irriducibili in* $[1]$, *e applicare poscia a ognuno di questi separatamente il metodo del Kronecker.*

Abbiamo così risoluto il problema proposto, che il metodo primitivo incompleto del Kronecker non risolveva in generale (1)

Se poi la funzione che si vuole decomporre contiene già β_1, poniamola $f(x, \beta_1)$, allora basta formare il prodotto

$$f(x, \beta_1) \cdot f(x, \beta_2) \ldots f(x, \beta_n),$$

che è una funzione $F(x)$ razionale in $[1]$, e decomporre questa prima in fattori irriducibili in $[1]$, e poi in $[\beta_1]$, e prendere alla fine soltanto quei fattori che sono contenuti in $f(x, \beta_1)$.

Terminiamo, osservando che il Kronecker non pensò affatto al caso che $f(x) = 0$ fosse irriducibile in $[1]$, e il Molk, suo commentatore, neppure; essi si limitarono soltanto a supporla priva di radici multiple, sicchè dovettero ritenere quel metodo valido in ogni caso: il che, si è visto, non è esatto. Qui abbiamo risposto in modo definitivo alla questione.

(1) Il Molk, in una sua Memoria (*Sur une notion* ecc., negli Acta Mathematica, vol. 6, anno 1885), commenta, amplia e precisa molte considerazioni del suo maestro Kronecker. Orbene, anch'egli si lascia sfuggire lo stesso errore, perchè giunge alla stessa conclusione dell'altro, la quale, si è visto, è assurda. Precisamente egli tenta di dimostrare che i fattori irriducibili in $[1]$ di $\Phi(z)$ sono tutti distinti, il che non è affatto vero in generale, nemmeno se $f(x)$ è irriducibile in (1); e da questa premessa errata egli giunge alla conclusione che abbiam vista del maestro (L'errore di ragionamento del Molk è, parmi, a pag. 44).

Geometria. — *Sulle superficie di Peterson* (1). Nota della Sig.na dott. ISABELLA PARIS, presentata dal Socio L. BIANCHI.

Le equazioni parametriche di una superficie S di Peterson riferita ad un sistema di assi coordinati cartesiani ortogonali e in cui per l'asse delle z è assunto l'asse della superficie, si scrivono:

$$(I) \qquad x = Uv \quad ; \quad y = U \cdot V \quad ; \quad z = u$$

dove U e V sono funzioni arbitrarie, rispettivamente della sola u e della sola v (2).

Se si esprime che la superficie S ammette un altro asse di Peterson, incidente al primo ed ortogonale ad esso (per es. l'asse delle x), e cioè che i profili meridiani $\frac{y}{z} = \text{cost}$ sono coniugati alle linee di livello $x = \text{cost}$, scrivendo la corrispondente condizione:

$$D\,du\,\delta u + D''\,dv\,\delta v = 0,$$

si trova che le funzioni arbitrarie U e V devono soddisfare l'equazione differenziale seguente:

$$(1) \qquad -UU''(vV' - V)\frac{V'}{vV} - U'V''\left(\frac{U}{u} - U'\right) = 0.$$

Questa ci dà subito:

$$(2) \qquad \frac{UU''}{U'\left(\frac{U}{u} - U'\right)} = k \quad ; \qquad (3) \qquad \frac{vVV''}{V'(rV' - V)} = k$$

dove k è una costante arbitraria. Con una prima quadratura la (2) ci dà:

$$U' = C_1 \frac{U^k}{u^k} \qquad (C_1 \text{ costante arbitraria})$$

e con una seconda (supposto per ora $k \neq 1$):

$$\frac{U^{1-k}}{1-k} = \frac{C_1}{1-k}u^{1-k} + C_1' \quad (C_1' \text{ costante arbitraria})$$

(1) Diciamo col Bianchi superficie di Peterson quelle in cui alle sezioni piane prodotte nelle superficie dei piani di un fascio sono coniugate le sezioni fatte con piani normali all'asse del fascio (asse della superficie).

(2) Cfr. Bianchi, *Le congruenze rettilinee infinite volte di rotolamento e le superficie di Peterson*, § 7, Memorie della Società dei 40, Serie 3a, tomo XIX (1916).

La funzione U viene quindi determinata dall'espressione:

$$U = \sqrt[1-k]{C_1 u^{1-k} + C_2} .$$

Dalla (3), con due quadrature, determiniamo la funzione V:

$$V = \sqrt[1-k]{C' v^{1-k} + C}$$

dove C e C′ sono costanti arbitrarie. Le equazioni parametriche (1) si scrivono quindi:

$$x = \sqrt[1-k]{C_1 u^{1-k} + C_2} \cdot v$$
$$y = \sqrt[1-k]{C_1 u^{1-k} + C_2} \cdot \sqrt[1-k]{C' v^{1-k} + C}$$
$$z = u .$$

Ed eliminando i parametri u, v:

$$-C' x^{1-k} + y^{1-k} - CC_1 z^{1-k} = CC_2 ,$$

che scriviamo (supponendo $CC_2 \neq 0$) [1]:

$$Ax^{1-k} + By^{1-k} + Cz^{1-k} = 1 ,$$

equazione che ci definisce le superficie tetraedrali di Lamé.

Il caso ora escluso $k = 1$, si tratta subito. Per esso le equazioni differenziali (2) e (3) integrate ci dànno:

$$U = C_2 u^{C_1} \quad ; \quad V = C' v^{C+1}$$

e quindi le equazioni parametriche della superficie che ne risulta si scrivono:

$$x = C_2 u^{C_1} \cdot v$$
$$y = C_2 C' u^{C_1} \cdot v^{C+1}$$
$$z = u .$$

Ed eliminando i parametri u, v:

$$Ayz^{CC_1} = Bx^{C+1} ,$$

che scriviamo:

$$x^\alpha y^\beta z^\gamma = \text{cost.}$$

Notiamo ora che, esprimendo per la superficie S l'esistenza di un terzo asse di Peterson incidente ai due considerati nel loro punto comune ed ortogonale ad essi (l'asse delle y), si trova la *stessa* equazione differenziale (1).

[1] Per $CC_2 = 0$ la superficie si risolve in $1 - k$ piani per l'asse z, o in un cono col vertice nell'origine degli assi e questo a seconda che è zero C (ovvero C e C_2), oppure è zero C_2 soltanto.

Possiamo quindi concludere che:

Una superficie di Peterson che ammetta due assi diversi incidenti ed ortogonali, ne ammette anche un terzo, incidente ed ortogonale ai due. Tali superficie sono tutte e sole le superficie tetraedrali di Lamé [1]:

$$Ax^{\alpha} + By^{\alpha} + Cz^{\alpha} = 1 \tag{II}$$

e le superficie:

$$x^{\alpha}\, y^{\beta}\, z^{\gamma} = \text{cost.} \tag{II*}$$

Osservazione. — Nelle notazioni di Monge le superficie di Peterson *rispetto all'asse z* sono caratterizzate dalla equazione a derivate parziali del secondo ordine

$$q(rx + sy) = p(sx + ty) \tag{A}$$

e quelle di Peterson *rispetto all'asse x* dall'altra

$$s(z - qy) + typ = 0. \tag{B}$$

Similmente le superficie di Peterson *rispetto all'asse y* sono caratterizzate dalla terza [ottenuta dalla (B) collo scambio di x, y]

$$s(z - px) + rxq = 0; \tag{B*}$$

e poichè la (A) si ottiene dalle (B), (B') per sottrazione, ne risulta nuovamente dimostrata la prima parte del teorema superiore. I risultati ottenuti provano poi che le due equazioni simultanee (A), (B) (non in involuzione) posseggono soluzioni comuni dipendenti dal massimo numero possibile di costanti arbitrarie, cioè da quattro; e tali soluzioni sono calcolate così in termini finiti dalle formole (II) e (II*).

[1] Fra queste figurano le quadriche a centro che sono appunto, come è evidente, superficie di Peterson rispetto a ciascuno dei loro tre assi.

Fisica. — *Determinazione delle costanti elettroniche del bismuto* (1). Nota di G. C. Trabacchi, presentata dal Corrispondente O. M. Corbino.

1. La determinazione delle costanti elettroniche dei metalli fu già tentata da Zahn (2), utilizzando le formule generali di Drude e misurando su una sola lamina tutti gli effetti conosciuti, sia quelli galvanomagnetici, sia quelli che dipendono dalle proprietà del metallo connesse con la teoria della propagazione del calore; ma egli non potè ottenere alcun risultato. Più tardi il dott. Senepa (3), impiegando le formule proposte dal prof. Corbino, affrontò nuovamente il problema; ma anch'egli dovette ricorrere a fenomeni dipendenti dalla teoria di Drude sui fenomeni termomagnetici e dovette scartare le misure dell'effetto Righi, perchè per esso si sarebbe dovuto ammettere un segno opposto a quello sperimentale, se si voleva giungere a valori ammissibili delle costanti. Recentemente il prof. Corbino (4), riprendendo i suoi lavori del 1915 (5) sulla conducibilità delle lamine metalliche sottoposte all'azione di un campo magnetico, a temperatura costante, ha stabilito delle relazioni che possono permettere la determinazione delle quattro costanti elettroniche della teoria di Drude, e cioè i numeri di ioni positivi e negativi esistenti per centimetro cubo e le rispettive mobilità.

Tali relazioni sono basate su particolarità dei fenomeni galvanomagnetici, finora ritenute non spiegabili con la teoria; e cioè le variazioni della costante dell'effetto Hall al mutare del campo e le variazioni di resistenza subite dal metallo per effetto del campo; esse lasciano completamente da parte tutti gli altri fenomeni di origine termomagnetica.

2. Indicando con N_1, N_2 il numero di ioni positivi e negativi per cm^3;
con v_1, v_2 le rispettive mobilità definite come nella teoria di Drude;
con R il valore della costante di Hall; con R_0 la stessa per campi piccolissimi:
con e il valore assoluto, comune, della carica delle due specie di ioni;
con C la conducibilità elettrica del bismuto sotto l'azione del campo;
con C_0 la conducibilità elettrica del bismuto fuori del campo;
con b_1 il valore di $\frac{N_1 e^2 v_1}{C_0}$; con b_2 quello di $\frac{N_2 e^2 v_2}{C_0}$; con H l'intensità del campo;

(1) Lavoro eseguito nell'Istituto Fisico della R. Università di Roma.
(2) Ann. d. Phys., *14*, 1904, pag. 886.
(3) Nuovo Cimento, ser. VI, vol. VI, nov. 1913.
(4) Rend. Acc. Lincei,
(5) Rend. Acc. Lincei, vol. XXIV, 1° sem., pag. 213, 1915.

e ponendo nelle equazioni date dal prof. Corbino al § 5:

$$-\frac{\Delta C}{C_0} : H^2 = k\,,$$

$$\frac{RC - R_0 C_0}{H^2} = h\,;$$

le equazioni stesse si possono scrivere nel modo seguente:

(1) $$R_0 C_0 = e(b_1 v_1 - b_2 v_2)$$

(2) $$\frac{h}{k} = e(v_2 - v_1)$$

(3) $$k = b_1 b_2 e^2 (v_1 + v_2)^2$$

(4) $$1 = b_1 + b_2\,.$$

Dalle (2) e (3), ponendo:

(5) $$y_1 = e v_1 \quad , \quad y_2 = e v_2\,,$$

si ha:

(6) $$\sqrt{\frac{k}{b_1 b_2}} = y_2 + y_1$$

$$\frac{h}{k} = y_2 - y_1\,;$$

donde:

(7) $$y_1 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{k}{b_1 b_2}} - \frac{h}{k}\right] \quad , \quad y_2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{k}{b_1 b_2}} + \frac{h}{k}\right];$$

che, sostituiti nella (1), ove si ponga:

$$R_0 C_0 + \frac{1}{2}\frac{h}{k} = A\,.$$

dànno:

(8) $$\frac{b_2}{b_1} = 1 + \frac{2A^2}{k} \pm \sqrt{\left[1 + \frac{2A^2}{k}\right]^2 - 1}\,.$$

La (8) ha due soluzioni, ma una di esse (quella corrispondente al segno —) è data da un numero molto piccolo; questa soluzione è da scartare, perchè, per la (1), deve essere:

$$b_1 v_1 < b_2 v_2\,;$$

e poichè la risoluzione numerica prova che anche con la soluzione che si scarta i valori di v_1 e v_2 sono poco differenti fra loro, l' ultima disugua-

glianza non può essere soddisfatta per valori di b_2 molto minori di b_1, come sarebbero quelli che si dedurrebbero scegliendo il segno — avanti al radicale.

Indicando pertanto con l la soluzione scelta, e ricordando che

$$b_1 + b_2 = 1 ,$$

si deduce

$$b_1 = \frac{1}{1+l} ,$$

$$b_2 = \frac{l}{1+l} ;$$

per cui dalle (7), tenendo conto delle (5) si ha:

$$(9) \qquad \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2e}\left[(1+l)\sqrt{\frac{k}{l}} - \frac{h}{k}\right] \\ v_2 &= \frac{1}{2e}\left[(1+l)\sqrt{\frac{k}{l}} + \frac{h}{k}\right] . \end{aligned}$$

Ricordando che

$$(10) \qquad \begin{aligned} b_1 &= \frac{N_1 e^2 v_1}{C_0} , \\ b_2 &= \frac{N_2 e^2 v_2}{C_0} , \end{aligned}$$

si deducono per N_1 e N_2 i valori seguenti:

$$(11) \qquad N_1 = \frac{b_1 C_0}{e^2 v_1} \quad , \quad N_2 = \frac{b_2 C_0}{e^2 v_2} .$$

Occorre dunque che l'esperienza permetta la misura di

$$R , R_0^{\frac{H}{2}} , C_0 , \frac{\Delta C_1}{C_0} , H .$$

3. Prima di accingermi a queste misure ho sottoposto la teoria ad un primo cimento, verificando la formula data dal Corbino (1) per mettere in relazione la variazione di resistenza nei due casi tipici nei quali essa ha realmente un significato: ossia per una lamina ad elettrodi puntiformi e per una lamina a forma di corona circolare con elettrodi estesi a tutti i contorni. Per questi due casi il Corbino ha dato una equazione che permette una verifica sperimentale assai rigorosa. Indicando

con $\frac{\varrho_H}{\varrho}$ la variazione di resistenza specifica subìta dal metallo nel caso della corona circolare;

(1) O. M. Corbino, Rend. Acc. Lincei

con $\frac{r_H}{r}$ la stessa nel caso della lamina a contorni liberi;

con β l'angolo di cui ruotano le linee equipotenziali per effetto del campo nel caso della lamina a contorni liberi;
la relazione data dal Corbino è la seguente:

$$\frac{\varrho_H}{\varrho} = \frac{r_H}{r}(1 + \mathrm{tag}^2\beta) \quad (1). \tag{12}$$

Effettuate le misure con le opportune avvertenze, ho trovato perfetta coincidenza tra i valori misurati nel caso del disco e quelli per esso calcolati in base alla formula (12), deducendoli dai valori trovati per la lamina a contatti puntiformi.

Ottenuta in tal modo la verifica di questo punto essenziale della teoria, mi sono accinto alla misura delle grandezze occorrenti al calcolo delle costanti elettroniche.

4. La determinazione di queste grandezze è stata da me eseguita con opportuni accorgimenti sperimentali che non possono essere descritti qui per mancanza di spazio, ma saranno riferiti altrove, ed ha condotto, per campi piccolissimi, ai valori seguenti per le quattro costanti elettroniche:

$$N_1 = 0{,}5.10^{18} \qquad N_2 = 1{,}8.10^{18}$$
$$v_1 = 5{,}4.10^{15} \qquad v_2 = 15{,}6.10^{15}.$$

5. Per sottoporre questi risultati ad una prova che permettesse di rendersi conto della loro attendibilità, me ne sono servito per calcolare lo scarto dalla legge di Wiedemann e Franz, quale è previsto dalla teoria di Drude; e poichè per tale verifica mi era necessario conoscere la variazione relativa della concentrazione degli ioni al variare della temperatura, ho ripetuto tutte le esperienze portando la lamina di bismuto alla temperatura di — 65°.

I valori trovati a questa temperatura sono i seguenti:

$$N_1 = 0.24.10^{18} \qquad N_2 = 0{,}98.10^{18}$$
$$v_1 = 13{,}9.10^{15} \qquad v_2 = 41{,}6.10^{15}.$$

La deviazione dalla legge di Wiedemann e Franz è data da

$$W = 2\,T\,b_1\,b_2\,x,$$

dove T è la temperatura assoluta alla quale si sperimenta, b_1 e b_2 hanno

(1) Una relazione apparentemente analoga alla (12) era stata già ottenuta da Boltzmann [Wien Anz., XXIII; Journ. de Phys. (2), VI, 290, 1887], ma in essa non era tenuto conto della variazione di resistenza che si riscontra in una lamina a elettrodi puntiformi, così che non sorprende che Ettingshausen [Wien. Sitzungsb. 95 (2), pag. 714, 1887] non l'abbia trovata verificata.

i valori già indicati e x è dato dall'espressione seguente:

$$x = \frac{1}{N_1} \cdot \frac{dN_1}{dT} + \frac{1}{N_2} \cdot \frac{dN_2}{dT} .$$

Se pertanto ci serviamo per calcolare x dei numeri trovati, avremo:

$$x = 1{,}17.10^{-2}$$

e poichè dall'esperienza risulta

$$b_1 b_2 = 0{,}07 ,$$

si calcola, per lo scarto dalla legge di Wiedemann e Franz, il valore

$$W = 0{,}50 ,$$

che è assai poco differente da quello determinato sperimentalmente da Jäger e Diesselhorst ($W = 0{,}505$ a 18°) (1).

Si vede dunque che, partendo da due fenomeni galvanomagnetici (deviazioni dalla legge di proporzionalità dell'effetto Hall e variazione di resistenza col campo) si può pervenire alla determinazione del rapporto fra la conducibilità elettrica e calorifica del metallo, trovando valori assai prossimi a quelli che per tale rapporto dà l'esperienza diretta, il che rappresenta una notevole convalidazione della teoria.

6. Da quanto è stato esposto appare evidente che la teoria elettronica di Drude dà spiegazione sufficiente, tra gli altri fenomeni, di quello della variazione di resistenza nel campo. Sembra pertanto necessario un riesame dei risultati sperimentali che indurrebbero ad ammettere che le variazioni di resistenza fossero dovute invece ad alterazioni delle proprietà specifiche dei conduttori per opera del campo magnetico.

Patterson trovò che le lamine sottilissime di bismuto deposte per catodopiastia non presentano variazioni di resistenza per opera del campo (2); sperimentando con lamine ottenute comprimendo polveri di bismuto, io (3) ebbi a riscontrare che anch'esse subivano variazioni piccolissime; e poichè per l'effetto Hall in dette lamine trovai valori normali come per il bismuto fuso, fui indotto ad ammettere che le variazioni di resistenza fossero dovute, almeno per la massima parte, ad alterazioni della struttura provocate dal campo.

In seguito ai risultati della citata ricerca teorica del prof. Corbino e delle mie esperienze sopra riferite, ho acquistato la convinzione che vi fosse errore o nelle esperienze o nella loro interpretazione; le ho pertanto accu-

(1) Sitzungsber. d. k. Acad. d. Wissensch. zu Berlin, 38, 1899.
(2) Cambr. Proc. (2) 9, 118 (1901).
(3) Rend. Acc. Lincei, ser. 5ª, vol. XXIV, 1° sem., pag. 1053.

ratamente ripetute, ed, avendo ottenuto gli stessi risultati di prima, ho cercato di trovare la spiegazione dell'apparente contraddizione fra la teoria e le esperienze.

7. Quando si comprime una polvere anche a pressione elevatissima, non è possibile allontanare completamente le atmosfere superficiali dei granuli di polvere, i quali possono del resto anche essere ricoperti da un leggero strato di ossido, specialmente quando sono preparati per via chimica; poichè l'asciugamento, per quanto fatto con cura e in ambiente privo di aria, è accompagnato quasi sempre da una ossidazione più o meno profonda, e non di rado, malgrado si usino tutte le precauzioni, buona parte del bismuto precipita allo stato di ossido, che rimane così mescolato alle parti metalliche. Tutto ciò costituisce una resistenza addizionale, che non è alterata dall'azione del campo; la presenza di questa resistenza, che ha un valore rilevante rispetto a quella del bismuto, attenua la variazione relativa di resistenza di quest'ultimo; infatti, misurando il valore assoluto della resistenza specifica delle lamine artificiali, anche dopo una compressione che conferiva loro una densità pari a quella del bismuto fuso, ho riscontrato che essa è superiore alla resistenza specifica di quest'ultimo, in misura sufficiente per spiegare l'apparente piccolezza della variazione *relativa* di resistenza del metallo.

Patologia vegetale. — *Su di un caso di invasione di ruggine nera dei cereali « Puccinia graminis Pers » in Terra di Lavoro.* Nota di C. Campbell, presentata dal Socio R. Pirotta.

Nel giugno 1913, venivo chiamato in Atina, per giudicare di una forte invasione di ruggine, che in una contrada, e da circa un trentennio, rendeva pressochè nullo il raccolto del frumento.

La cosa non era certo passata inosservata, e se ne erano seriamente occupati e preoccupati anche prima, proprietari e coltivatori, senonchè il giudizio dato e ripetuto da altri, trattarsi di ruggine comune del frumento, e nella contrada, e della stessa specie dominante in tutto il territorio, e non potersi contro la stessa praticamente far nulla, fece più serenamente sopportare il notevole danno per tanti anni di seguito. Dalla descrizione avuta del caso, e senza materiale per una diagnosi immediata, mi colpì il fatto, che il danno fosse limitato a punti ben determinati, ed è sorprendente come esso non si sia reso evidente a chi prima aveva giudicato con tanta leggerezza!

Le personali ricerche sulla ruggine del frumento dal 1900 in poi, con osservazioni ed esami microscopici sopra materiale raccolto nelle più varie condizioni e contrade della provincia, mi avevano chiaramente dimostrato,

che la ruggine, che attaccava il frumento nella regione, doveva attribuirsi alla specie *Puccinia Rubigovera D. D. p. p.* considerata come specie comprensiva. È noto del resto quanto mal sicura sia ancora la sistematica delle ruggini e la conoscenza della loro specializzazione, sulle specie biologiche o fisiologiche, da ritenere opportuno non fermarmi su di una questione ancora tanto controversa.

L'osservazione continuata per anni, di alcune piante di *Berberis vulgaris L.* in Isola del Liri, resto di una siepe di giardino distrutta, costantemente prive della nota forma ecidiosporica, e la mancanza nelle colture di frumento circostanti della *Puccinia graminis* che dalla forma ecidiosporica del Berberis trae la sua origine, venne a convincermi, che le osservazioni e ricerche fatte sulla ruggine del frumento, nelle varie località, erano esatte, e la *Puccinia graminis* era estranea completamente alla flora micologica locale.

Assunte prima della visita le più ampie informazioni possibili sul caso denunciatomi, potetti apprendere, come l'infezione fosse apparsa da circa un trentennio, e si trovasse limitata ad una zona collinosa confinante col piano, a più ristretta zona collinosa, e ad altra ristretta del piano, tatti questi che mi fecero supporre trattarsi di infezione diversa dalla ruggine, come mi si denunciava, e non fu poca la mia meraviglia, quando il 20 giugno recatomi sul posto, mi vidi di fronte alla più forte infezione di ruggine che si possa immaginare, da rendere pressochè nullo il raccolto, precisamente così come mi era stato riferito. Potei subito constatare, che meno lievi varianti, tutte le varietà di frumento erano indistintamente e gravemente colpite, un poco meno le precoci sulle tardive, quelle fortemente concimate sulle meno o non concimate con nitrato sodico, ma in generale una infezione gravissima che colpiva fortemente tutta la pianta dalla base del culmo alla spiga, che per quanto regolarmente formata, non portava che pochi granelli, poco e male sviluppati.

Al limitare della grave infezione, in una zona ristretta d'invasione meno grave, che si confondeva man mano con le colture immuni da *Puccinia graminis*, era palese solo la forma dominante di ruggine, che non aveva mai recato e non recava i danni notati.

Raccolsi materiale per osservazioni microscopiche, e dissi subito che nella contrada dovevano trovarsi piante di *Berberis*, che chi mi accompagnava e i coltivatori del luogo, mi dichiararono concordemente non conoscere.

Colpito da un fortissimo temporale, per quanto mi fu possibile, sulla via del ritorno, cercai lungo le siepi, malgrado il cattivo tempo, *del Berberis*, che non tardai a ritrovare, con rare foglie colpite dalla forma ecidiosporica. Lo mostrai a chi mi accompagnava, lasciandone esemplare, con l'incarico di ricercare in tutta la zona colpita, e fuori di essa, le piante e..tenti, per segnalarmele in una prossima visita.

Il 29 dello stesso mese, ritornai sul posto, visitando attentamente tutti i luoghi in cui si era riscontrata l'esistenza del *Berberis*, e potei constatare come l'infezione partisse da un resto di siepe di *Berberis*, non lungi da una casa colonica, nella parte più elevata della regione, e seguisse dal sito mio al piano, la direzione del vento dominante, da dimostrare chiaramente, come l'infezione seguisse la dispersione delle ecidiospore dall'alto in basso, seguendo la direzione del vento. Infatti nelle coltivazioni a monte del resto di siepe di *Berberis*, l'infezione si arrestava a brevissima distanza.

Altro piccolo centro di infezione ristretto si trovava nel colle, a partire da una pianta isolata di *Berberis*, e per tratto sottostante, anche in direzione del vento dominante.

Il terzo centro d'infezione si trovava nel piano, per breve tratto di raggio intorno ad una casa colonica circondata da siepe, tra cui si trovavano piante di *Berberis*. Il comportarsi della infezione in tale punto, dimostrava, come, nella diffusione della infezione, non avesse influito una sola corrente aerea, ma venti di varie direzioni.

Fatte tali constatazioni, dissi subito che per evitare l'infezione, con le sue gravi conseguenze, bastava solo la completa distruzione di tutte le piante di *Berberis* esistenti; mi raccomandai solo perchè ne fosse conservato qualche esemplare nel piano, per ricerche che intendevo compiere nella annata seguente.

Il consiglio, per quanto sembrasse paradossale, fu scrupolosamente seguìto in maniera che nel 1914, mi fu possibile seguire dal principio alla fine le colture di frumento nelle tre località indicate, e prossime tra loro, e nelle vicinanze.

Le previsioni ebbero, come era prevedibile, esito il più felice; l'infezione non si palesò che in prossimità delle piante di *Berberis* rimaste, nelle quali ho potuto seguire tutte le fasi della infezione, nelle stesse e dalle stesse al frumento.

Distrutte anche le piante di *Berberis* rimaste, nella stessa estate 1914, dal 1915 ad oggi l'infezione non è riapparsa, e la coltura del frumento, nella ubertosa contrada, è ritornata come prima fruttifera, colpita sì dalla ruggine, ma della specie indigena alla contrada, e mai palesatasi tanto dannosa, neanco in modo approssimativo.

Il fatto era però troppo importante ed interessante, perchè non convenisse rifarne la storia, sulla base delle notizie che era possibile avere. Ho potuto così accertare, come un trentennio prima, fossero state acquistate dal senatore Visocchi, proprietario del terreno, le piante di *Berberis* che servirono alla formazione della siepe, in seguito parzialmente distrutta; ma ciò non basterebbe forse a spiegare l'origine della infezione, che può trovare spiegazione col fatto, che contemporaneamente nel luogo furono fatti, e ripetuti per anni, esperimenti di varietà di frumento provenienti da altri paesi, e

probabilmente coi frutti, senza preventivi trattamenti, e con resti di glume e frammenti di paglia è stabilita l'origine della infezione, che, con la presenza del *Berberis*, ha avuto il suo completo ciclo evolutivo.

Che le ruggini possano trasmettersi mercè lo svernamento della forma uredosporica, o del micelio, non può certo escludersi e studî in proposito tendono a dimostrarlo in modo non dubbio. Nel caso in parola però l'infezione non ha perdurato oltre la distruzione del *Berberis*, ma è venuta a cessare con la sua distruzione, così come ha avuto origine con la sua prima presenza nel luogo. È quindi evidente come alla presenza del *Berberis*, introdotto, ed estraneo alla flora locale, si debba la grave infezione di *Puccinia graminis*, la cui prima origine lascia naturalmente ancora luogo ad ipotesi.

Del resto, è noto come ecidiospore ed uredospore perdano in ambiente caldo asciutto, in breve, la loro facoltà germinativa, e la perpetuazione attraverso la forma uredosporica, con graminacee spontanee, se possibile in determinate condizioni di ambiente, non lo deve essere certamente dovunque, e più specialmente là dove, pei lunghi periodi di siccità, si riscontrino le contrarie condizioni di siccità e calore.

A confermarmi in tali deduzioni, venne ancora una esperienza condotta, al Giardino Botanico-Forestale di Montecassino, dove una pianta di *Berberis* appositamente introdottavi, si mantenne costantemente immune, tra piante di frumento, appositamente coltivate in giro, provenienti da coltivazioni non colpite da *Puccinia graminis*, e da seme preventivamente disinfettato.

La sostituzione del metodo biologico alla indagine diretta, ritengo possa in molti casi giovare al ricercatore. Se infatti in una contrada si ritiene esistente la *Puccinia graminis*, e si ammette la sua perpetuazione attraverso la forma uredosporica, cosa dubbia, data la poca resistenza delle uredospore alle esterne condizioni; introducendo piante di *Berberis*, si dovrà in queste trovare a suo tempo la forma ecidiosporica. Ma, se, malgrado tutto, il *Berberis* si mantiene immune, se ne dovrà arguire che la ruggine della contrada, appartenga a specie diversa.

L'indagine biologica verrà così in aiuto sicuro a quella immediata, della osservazione dei caratteri distintivi della specie.

Anatomia. — *Osservazioni sopra i rapporti tra il nervo trocleare e la radice mesencefalica del quinto paio.* Nota del dott. Primo Dorello, presentata dal Corrisp. S. Baglioni.

Fra gli autori che si sono occupati delle cellule vescicolari, le quali secondo l'opinione più comunemente accettata dànno origine alla radice mesencefalica del quinto paio, parecchi hanno sostenuto che i cilindrassi emanati da queste cellule contribuissero alla formazione del patetico.

Tale idea fu già sostenuta dallo Stilling.

Deiters osservando queste cellule lungo il dercorso del patetico rimase in dubbio se i loro cilindrassi partecipassero alla formazione di questo nervo.

Stieda nel 1870 affermò che le cellule vescicolari costituiscono un nucleo di origine comune pel patetico e per la piccola radice del V.

La questione fu poi trattata ampiamente da Duval, il quale nel suo lavoro sui nervi craniali affermò recisamente che le fibre emesse dal nucleo vescicolare non partecipavano affatto alla formazione del patetico. Questo in alcuni animali, come nei roditori, era semplicemente attraversato dalla radice mesencefalica, in altri, come nel gatto, si manteneva sempre all'esterno di questa, mentre che nell'uomo era situato all'interno.

Nel 1893 Golgi riaffermò nuovamente la partecipazione del nucleo vescicolare alla formazione del patetico, ma tale idea fu combattuta vivamente dal Kölliker nel 1896.

Studiando lo sviluppo del nucleo vescicolare nel maiale ho avuto occasione di osservare gli stretti rapporti che esso contrae col patetico e mi sono potuto spiegare benissimo come varî autori siano caduti nell'equivoco di ritenere che il nucleo vescicolare contribuisse alla formazione del quarto paio.

In questa breve Nota esporrò il comportamento osservato negli embrioni di maiale da 6 a 17 centimetri, comportamento, che pur risultando alquanto simile a quello osservato da Duval nei roditori, se ne differenzia per importanti particolari.

Le osservazioni furono fatte su preparati eseguiti col metodo di Cajal, i quali riuscirono molto dimostrativi anche per il fatto che in genere le fibre del patetico si colorano in giallo scuro e quelle del nucleo vescicolare in nero intenso, rendendo così più facile la differenziazione.

I fascetti di origine del trocleare staccatisi in numero di 7 od 8 dalla faccia laterale del loro nucleo si portano dapprima pressochè direttamente verso l'esterno, passando in mezzo ai fascetti più dorsali del fascicolo longi-

tudinale dorsale ed incrociandoli ad angolo retto. Dopo un breve percorso in questa direzione essi si ripiegano ad angolo retto in senso caudale e nello stesso tempo si raccolgono maggiormente in modo che ne risulta un fascio più grande, il quale rappresenta i due terzi di tutto il nervo, e due o tre fascetti più piccoli posti medialmente al precedente.

Il tratto longitudinale del trocleare è situato nella sua parte rostrale in un piano un po' più ventrale del margine inferiore del nucleo vescicolare, il quale in questo punto ha la forma di una calotta, che tappezza la faccia laterale del grigio centrale delle bigemine posteriori.

Dirigendosi caudalmente questa porzione del trocleare devia a grado a grado e leggermente in direzione dorsale, in modo da ravvicinarsi man mano alla superficie esterna del nucleo vescicolare a breve distanza dal suo margine ventrale. Stabilitosi il contatto, il patetico decorre per un notevole tratto nello spessore del nucleo vescicolare, tendendo a sospingere medialmente le fibre e le cellule di esso, sicchè in corrispondenza del patetico le cellule hanno una situazione più profonda delle altre e le fibre presentano dei piccoli incurvamenti, che si adattano alla convessità della faccia mediale del trocleare. Si può dunque dire che il patetico, scorrendo lungo la faccia esterna del nucleo vescicolare, vi determina la formazione di una o più doccie, a ciascuna delle quali corrisponde un rilievo della faccia mediale.

Giungendo all'indietro della bigemina posteriore, il patetico contrae gli stessi rapporti con quella porzione del nucleo vescicolare che corrisponde al pedunculo cerebellare superiore ed al velo midollare anteriore, ma qui i fenomeni osservati si accentuano maggiormente, perchè il patetico, i cui fasci si sono ora notevolmente ravvicinati od anche riuniti in un unico tronco si avvia più decisamente in direzione dorsale a poi mediale per decorrere trasversalmente nello spessore del velo midollare ed allora incrociando le fibre del nucleo vescicolare le trascina con sè medialmente e le obbliga a descrivere delle anse notevolmente lunghe; sicchè mentre l'estremità dell'ansa abbraccia la faccia mediale del patetico, le due branche di essa costeggiando per un tratto più o meno lungo il nervo, dànno la falsa apparenza di fibre emanate dal nucleo vescicolare ed aggiuntesi al patetico.

Questa apparenza può riuscire facilmente ad ingannare l'osservatore, in quantochè la trazione meccanica esercitata sulle fibre non rimane senza influenza anche sulle cellule: infatti nel nucleo vescicolare le cellule sono orientate in modo che il loro nucleo è diretto medialmente, la massa protoplasmatica lateralmente ed il prolungamento cilindrassile nel primo tratto del suo decorso è pure diretto lateralmente. Invece nelle cellule, le cui fibre sono tirate dal patetico, alcune volte, senza che si sposti la cellula, è il prolungamento cilindrassile che a breve distanza dalla sua origine si ripiega ad angolo più o meno acuto per avvicinarsi al patetico, altre volte è tutta le cellula che presenta un orientamento opposto all'abituale.

Si comprende quindi facilmente come osservatori anche valenti, avendo visto cellule così orientate ed i loro prolungamenti cilindrassili accollati al patetico, abbiano potuto ritenere che le fibre emanate dal nucleo vescicolare entrassero nella costituzione del trocleare.

Solo conducendo le sezioni in direzioni diverse, ma specialmente in quelle intermedie tra le trasversali e le frontali, si può osservare il fatto nella sua realtà.

Negli stati più giovanili il fenomeno è notevolmente accentuato in corrispondenza del velo midollare anteriore e quivi non solo le fibre, ma anche le cellule vescicolari sono tirate profondamente nello spessore del velo midollare; in tal caso il loro prolungamento cilindrassile è pure accollato al patetico, ma ha direzione centripeda: quando invece la trazione è stata esercitata sopra una fibra a distanza più o meno notevole dalla sua origine la fibra ha direzione dorsomediale e quindi si potrebbe pensare che fosse destinata, se non al patetico, al cervelletto come suppose qualche autore.

Negli stati più avanzati le cellule vescicolari situate molto profondamente nello spessore del velo midollare non si riscontrano più con frequenza, il che potrebbe far pensare che esse hanno subìto una nuova migrazione verso la loro base di origine o che allontanate dal loro territorio sono andate in rovina.

In embrioni di cm. 17 in corrispondenza dell'estremo caudale della bigemina posteriore si osservano fenomeni interessanti, la maggior parte dei quali sono rappresentati nella fig. 1, e che mostrano con grande evidenza l'azione meccanica esercitata dal patetico sulle fibre del nucleo vescicolare.

Uno dei fatti che prima salta agli occhi nei preparati è la rarefazione del tessuto nervoso situato lungo la faccia laterale del trocleare. A causa di tale rarefazione sotto l'influenza del fissatore si sono formate in questo punto una serie di piccolissime lacerazioni. Si osserva inoltre che, mentre in ogni altro punto il nucleo vescicolare è formato da un'unica serie di cellule e di fibre disposte quasi tutte nel piano situato immediatamente all'esterno delle cellule, a livello del patetico e nelle sue adiacenze è diviso nettamente in due strati, uno laterale ed uno mediale rispetto a questo nervo. Lo strato laterale segue l'andamento generale del nucleo vescicolare o tutto al più proprio di fronte al quarto paio mostra una lieve insenatura la cui convessità guarda la faccia esterna del nervo.

Lo strato mediale invece mostra colla massima evidenza la forte trazione subìta per opera del patetico, che vi ha determinato la formazione di un angolo. Si ha così un triangolo, la cui base è rappresentata dalle fibre rimaste lateralmente al patetico. Le fibre vescicolari, ben distinte e separate le une dalle altre all'estremità dei lati, man mano che procedono verso il vertice si ravvicinano sempre più ed in corrispondenza del vertice stesso sono talmente strette una contro l'altra che riesce difficile distinguerne

le linee di separazione. Queste fibre mediali hanno perduto la maggior parte delle caratteristiche ondulazioni, che sono frequentissime nello strato esterno ed in tutto il resto del nucleo vescicolare.

Ma la trazione ha prodotto anche lo strappamento di alcune fibre. Lo strappamento non si osserva di regola in corrispondenza del vertice, ma ad una certa distanza da esso, in modo che si vedono alcune fibre le quali presentano da una a tre interruzioni estese da 7 a 12 μ. In corrispondenza

Fig. 1. — Embrione di cm. 17. Sezione trasversale in corrispondenza della estremità caudale della bigemina posteriore. Koristka oc. 3, obb. 5. Ridotta a $^2/_3$. — *Aq*, acquedotto. *Ep*, ependima. *Pc*, peduncolo cerebellare superiore. *Tr*, patetico. *Nv*, nucleo vescicolare.

dell'interruzione alcune volte la fibra è ripiegata su se stessa: altre volte a breve distanza dall'interruzione stessa è avvolta a spirale mostrando come sia state superato il limite massimo della sua elasticità.

Nello spazio triangolare delimitato dalla porzione laterale e dalla mediale del nucleo vescicolare si vedono in ambedue i lati non poche fibre, che terminano colla loro estremità libera in detto spazio.

Per alcune si può ammettere trattarsi di fibre che presentavano una curva, la quale è accidentalmente caduta sotto il coltello, ma per altre è

logico ritenere che rappresentino fibre, le quali dopo lo strappamento a causa della loro elasticità sono ritornate verso i loro punti di attacco.

Quale sia il destino di queste fibre interrotte nella loro continuità io non saprei per ora precisare, ma il fatto che esse alla loro estremità libera presentano talvolta un tenue rigonfiamento può far pensare che esse siano destinate a rigenerarsi ed a riacquistare la loro continuità all'esterno del nervo trocleare.

Questa ipotesi è anche giustificata dal fatto che, mentre negli embrioni fino a 12 cm. le fibre del nucleo vescicolare sono tutte situate medialmente al patetico, negli embrioni più avanzati si trovano in parte medialmente in parte lateralmente, il che vuol dire che all'esterno del trocleare o si è ristabilita la continuità delle fibre interrotte o se ne sono formate delle nuove.

Debbo finalmente accennare ad una particolarità rispetto alla quale non sono riuscito a darmi una spiegazione plausibile ed è che le fibre della porzione mediale, malgrado abbiano subito un notevole allungamento, presentano in genere un calibro lievemente superiore rispetto a quello della porzione laterale.

Le osservazioni fatte mi portano alle seguenti conclusioni.

Il patetico durante il suo sviluppo subisce uno spostamento in direzione mediale: quella porzione di esso che ha un decorso longitudinale, situata in origine all'esterno del nucleo vescicolare, durante tale cambiamento di posizione non solo raggiunge questo nucleo, ma lo oltrepassa, obbligando le fibre e le cellule che incontra nel suo cammino a spostarsi innanzi ad esso.

Si vengono così a stabilire stretti rapporti fra il patetico ed il nucleo vescicolare, ma questi rapporti sono puramente topografici, perchè *nessuna fibra emanata dal nucleo vescicolare prende parte alla formazione del patetico.*

Questi intimi rapporti, mentre possono valere ad attenuare l'errore di alcuni osservatori, debbono metterci in guardia contro le false interpretazioni nelle quali si può incorrere, specialmente nello studio del sistema nervoso, quando si traggono conclusioni da fatti che non sono caduti completamente sotto il dominio della nostra osservazione.

Bibliografia. — *Il «Mnemografo»*. Nota del dott. GIULIO PROVENZAL, presentata dal Socio R. NASINI.

Le necessità dei miei studî e della mia attività mi hanno portato ad estendere alcuni concetti generalmente accettati da tutti gli studiosi nei riguardi della documentazione indispensabile alla vita attiva del pensiero. Questi concetti hanno trovato modo di armonizzarsi in una idea che mi permetto di sottoporre all'Accademia dei Lincei come quella che per sua natura è destinata a meglio comprenderne la portata pratica generale. La documentazione di ogni studioso è oggi fatta raccogliendo appunti e bibliografie su quaderni e su schede ed è ristretta saviamente al campo della particolare attività di ognuno. La specializzazione degli studî e delle funzioni viene a creare una forte erudizione intorno ad un numero ristretto di problemi sostenuta da una coltura generale rimasta atrofica dopo la licenza liceale in seguito allo squilibrio intervenuto per il tempo che dagli studî speciali è tolto agli agi degli studî generali. Intanto si fa sempre più generale il bisogno di più frequenti contatti fra specialisti, e in Italia la Società per il progresso delle scienze, risorta a nuova vita da pochi anni, si è proposta precisamente questo fine coi congressi e con le iniziative collettive.

Accanto a queste condizioni di fatto nel mondo scientifico, speculativo e tecnico, non vanno trascurate quelle che la stampa nel suo massimo sviluppo per mezzo dei periodici scientifici, letterarî e politici è venuta creando intorno.

La divulgazione scientifica e i bisogni di informazioni che accelerano la pulsazione della vita pratica, economica e civile degli uomini hanno portato alla sempre meglio sentita necessità di una cultura enciclopedica contrastante colla esigenza di tempo, di costanza e di serenità richiesta dalla profondità negli studi particolari. In altri termini, abbiamo tutti bisogno di sviluppare la nostra capacità di pensiero e di azione, in estensione e in profondità ad un tempo, e contro questa imperiosa spinta si oppongono troppo spesso le forze fisiche ed economiche di ogni studioso. Ad aiutare sono sorti i dizionarî enciclopedici che, da quegli strumenti di filosofia operante che furono un tempo, divennero degli affrettati empori di conoscenze generiche dove pubblicisti ed uomini di azione corrono ad attingere la superficiale coltura loro necessaria, volta per volta, a fini pratici ed immediati.

Tale stato di fatto è pernicioso al progresso della scienza che, se ha affrettato il passo, non può nondimeno esimersi dal lento prezioso lavoro di meditazione. È necessario quindi che lo studioso sia messo in condizioni di affrettare il proprio lavoro senza perdere forze d'intelletto che debbono ri-

serbarsi alla scoperta del vero ed alla invenzione dell'utile; precisamente come i perfezionamenti delle comunicazioni ci permettono di percorrere rapidamente distanze un tempo impensabili, senza affaticare il nostro corpo.

Nel campo degli studî ogni mezzo che consenta economia di tempo, senza scapito di quella serenità calma necessaria alla riflessione e all'esame accurato di ogni minuto particolare della scienza e della tecnica, è per se stesso prezioso. La enciclopedia, screditata presso gli scienziati e i letterati per la necessaria superficialità delle informazioni, conseguenza fatale delle ragioni economiche le quali presiedono alla sua confezione, ha inoltre l'inconveniente di non riuscire facilmente al corrente coi progressi rapidi del mondo intellettuale e pratico. Dovrebbe essere continuamente tenuta a giorno con rifacimenti editoriali difficili ed antieconomici. D'altra parte tutti gli specialisti, e cioè ormai tutti gli studiosi, trovano incompleta, errata, insufficente la parte nella quale hanno moltiplicato le loro cure. Con minore gravità gli stessi difetti si riscontrano nei dizionari di scienze speciali, poichè la specializzazione va sempre più accentuandosi; i limiti da lei posti ad ogni attività si fanno sempre più stretti. Se, come già alcuni fanno il proprio schedario, noi trasformassimo le enciclopedie e i dizionari tecnici in veri schedari stampati e riposti in apposite cassette per ordine alfabetico, o sistematico ed alfabetico ad un tempo, noi avremmo ovviato ad una parte degli inconvenienti. Noi potremmo correggere per nostro uso quelle schede che troveremmo errate o incomplete, sostituire quelle parti del nostro dizionario che fossero invecchiate.

Lo schedario che già noi facciamo a seconda del procedere dei nostri studî, non è una completa informazione della nostra disciplina, ma una agevolazione che creiamo a noi stessi per il domani conservando una parte di energia spesa ad un fine immediato per una utilità secondaria avvenire. Uno schedario invece preparato e stampato in anticipo, e comprendente la parte più importante dei nostri studî, è una macchina che costa a noi soltanto mezzi economici, ma che sin dal primo giorno ci dà un rendimento intellettuale non trascurabile. Questo schedario viene perfezionato da noi per nostro uso, e precisamente con l'uso, divenendo più aderente alla vita del nostro cervello; poichè lo completeremo, lo arricchiremo, lo aggiorneremo di tanto quanto sarà la nostra attività negli studî. Ma un altro notevole vantaggio ne sapremo trarre il giorno che con la frequentazione assidua di questo nostro « mnemografo » così individualizzato, saremo meglio padroni di tutto il campo della nostra attività e troveremo impensati ravvicinamenti d'idee. Ed è precisamente a questo fine che lo strumento da me ideato, include il dizionario speciale nel dizionario generale, nell'enciclopedia.

Il « mnemografo » è infatti una enciclopedia del tipo corrente nella quale, *per le varie categorie di studiosi* le schede che concerneranno le loro speciali preoccupazioni sono sostituite dalle rispettive schede del dizionario

tecnico speciale. Pensate una enciclopedia generale che comprenda in sè il dizionario di chimica o il dizionario d'ingegneria, o quello di matematica, o quello biografico, o quello storico, o quello legale, o quello geografico. La propria specialità si ritrova inquadrata nella informazione generale enciclopedica. Lo specialista innesta la sua attività intellettuale sulla enciclopedia e non più sulla cultura liceale rimasta in molte parti necessariamente atrofica. Il riavvicinamento delle idee si fa tanto più frequente quanto più largo è il campo nel quale possiamo spaziare e la distribuzione alfabetica dei dizionari, delle enciclopedie, degli schedari, ci consente di guadagnare tempo prezioso pur mettendo in opera un materiale considerevole.

Finalmente accanto alle schede della enciclopedia e a quella del dizionario particolare lo studioso potrà trovare delle schede bianche che varranno non soltanto per completare e correggere il proprio documentario, ma anche per segnare i proprî appunti, le idee abbozzate, le osservazioni utili. Ai vecchi taccuini, ai quaderni promemoria, sarebbero sostituite le schede conservate nel cuore stesso di questa speciale cartoteca e alla documentazione verrebbe ad associarsi nello stesso organismo il promemoria. Così formato il nuovo schedario sarà un vero « mnemografo » dove saranno inscritte non solo le idee e le informazioni che sappiamo o che dovremmo sapere, ma anche quelle che vogliamo ritenere, quelle che non hanno trovato ancora la forma pratica della esecuzione. Il « mnemografo » diventa meglio che un preziosissimo strumento di lavoro; esso diventa il registro personale della nostra attività cerebrale: e, chiuso a chiave, diventa il confidente dei nostri progetti, delle nostre speranze. Non abbiamo più la coltura fatta a macchina, industrializzata, che fornisce a tutti quel che è scritto nell'enciclopedia, nel dizionario tecnico e nulla più: noi abbiamo uno strumento che consente la difficile saldatura tra il lavoro individuale e quello collettivo; la definizione di una personalità singola senza essere singolare. Solidarietà e individualità, libertà ed associazione, attuate nel lavoro della documentazione nel modo più conveniente per la economia del tempo e della forza intellettuale.

Il mnemografo per il quale prendo data colla presentazione di questa Nota e che metto sotto la salvaguardia delle leggi per la proprietà intellettuale e industriale interessa l'Accademia, lo Stato e l'Economia nazionale per un'altra ragione che espongo brevemente.

Il carattere personale assunto da quegli strumenti generali che sono l'enciclopedia e il dizionario, lo fa necessariamente diventare particolarmente prezioso quando il mnemografo abbia appartenuto a uomini di alto valore. Non altrimenti avviene oggi delle biblioteche particolari le quali vengono comprate quali sono state create dai loro proprietarî. Un ingegnere o un avvocato o un medico comperando lo studio di un collega di alto valore troverà nel suo mnemografo un tesoro di idee che la sorte e la durata della vita non hanno acconsentito di germogliare e fruttificare come meritavano;

e quelle idee, che le condizioni intellettuali, fisiche, economiche di chi le ha fissate su carta non hanno favorite, potranno fecondarne altre in altri cervelli; progetti e opere incompiute potranno continuarsi.

L'individuo, solidale attraverso i libri e l'enciclopedia con tutto il mondo pensante, si lega con particolari vincoli di amicizia intellettuale al predecessore: le generazioni continuano con più intima collaborazione di pensiero l'opera di progresso.

Se però il mnemografo, avrà appartenuto a uno di quei genî che per secoli fanno oggetto di ammirazione e di studio noi avremo la più bella riproduzione della loro specialissima attività cerebrale. Ripensiamo allo Zibaldone di Leopardi, ai registri di laboratorio del Lavoister, agli archivî di tutti i grandi nostri più vicini con i loro appunti e i loro scritti inediti e immaginiamo quali monumenti noi potremo preparare ai posteri quando le accademie e lo Stato, le pubbliche biblioteche regaleranno in omaggio ai più illustri uomini questo prezioso raccoglitore del loro pensiero lo acquisteranno agli eredi perchè si prolunghi per alcun tempo dopo morte, viva, la fonte di tanta energia.

Ho creduto venuto il momento di esporre pubblicamente questo progettato nuovo strumento di progresso intellettuale perchè praticamente è apparso buono ad alcuni editori cui fu descritto da me con altri particolari tecnici durante la guerra e perchè, se ancora le condizioni tecnico-economiche della sua costruzione non si sono verificate, io intendo riserbarmi la priorità della invenzione ai suoi fini morali e pratici.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Socio Rianchi legge la seguente Commemorazione del defunto Accademico sen. Ulisse Dini:

Il 28 ottobre dell'anno scorso moriva nella sua diletta Pisa Ulisse Dini, quivi nato il 14 novembre 1845. La dipartita di così nobile figura di cittadino e di scienziato segnò veramente un grave lutto per la patria e per la scienza italiana, e l'universale profondo compianto che l'accompagnò nella tomba fu degno al tutto delle grandi benemerenze e dell'affetto che le eccelse qualità della sua mente e l'inesauribile bontà del suo cuore gli avevano ovunque conquistato.

Se a dire degnamente di Lui potesse bastare l'affetto riconoscente e devoto del discepolo, non io certo mi sentirei inferiore al compito affidatomi dalla Presidenza di questa Accademia, per onorare il Socio che fino dal 1882 tanto la illustrò col suo nome. Di questo compito sento tutto l'onore, e sen-

titamente ringraziandone la Presidenza, cercherò di assolverlo come meglio mi sarà possibile, entro i limiti di spazio che dovrò necessariamente impormi.

Fu più volte osservato che nei matematici di alto valore, come in generale nei predestinati alle maggiori creazioni dell'ingegno, le singolari disposizioni alla ricerca sogliono palesarsi, quasi sempre, assai precocemente. Ed anche nel nostro Ulisse Dini apparvero ben presto quando, compiendo appena diciannovenne il corso degli studi Universitarî, faceva concepire di sè ai due illustri maestri *Betti* e *Mossotti* le più alte speranze, che Egli doveva in seguito così brillantemente confermare.

La prima sua pubblicazione, apparsa nel volume II del Giornale di Battaglini (1864), si riferisce all'argomento della sua tesi di laurea, alla teoria delle superficie applicabili.

Il problema di trovare tutte le deformate per flessione di una superficie, supposta flessibile ed inestendibile, conduce ad una equazione a derivate parziali del secondo ordine, come per primo dimostrò il Bour, riferendosi ad un particolare sistema coordinato (alle linee di lunghezza nulla). Il Dini calcolò l'equazione stessa per coordinate qualunque, in una forma sviluppata equivalente a quella che si scrive ora brevemente coi simboli invariantivi. Con questa Nota si inizia una serie di importanti lavori del Dini su quel ramo di analisi applicata alla geometria, che prese poi il nome di *geometria differenziale* o infinitesimale. E già nell'anno successivo (1865), trovandosi Egli a Parigi per studî di perfezionamento, il Bertrand presentava all'Accademia di Francia una elegante Nota del Nostro, ove vennero per la prima volta determinate quelle singolari superficie elicoidali a curvatura costante negativa, aventi a profilo meridiano una trattrice e l'asintoto per asse, che portano appunto il nome di *elicoidi del Dini*.

Fra le molte Memorie appartenenti a questo primo periodo della sua attività scientifica spiccano quelle fondamentali sulla teorica delle superficie, pubblicate negli Atti della Società dei XL; colle loro numerose ed interessanti applicazioni, quali la determinazione completa delle superficie a linee di curvatura piane o sferiche, e di altre classi particolari di superficie. Ma, fra tutte le pubblicazioni accennate, raggiungono la maggiore maturità ed importanza due belle Memorie, pubblicate nel 1870-71 nei volumi III e IV degli Annali di matematica, delle quali la prima dedicata al problema della rappresentazione geodetica di una superficie sopra un'altra; la seconda alle formole generali di rappresentazione sferica. Il problema risoluto nella prima Memoria era stato proposto dal Beltrami in quei celebri studî delle superficie rappresentabili geodeticamente sul piano, che il Beltrami dimostrò essere tutte e sole le superficie a curvatura costante, e che formarono poi il fondamento per il classico Saggio di interpretazione della geometria non euclidea. Il risultato conseguito dal Dini, nella detta Memoria, è sommamente interessante ed altrettanto inaspettato; esso esaurisce tutti i casi nei

quali l'equazione differenziale delle geodetiche ammette integrali quadratici nelle derivate, e dimostra che (prescindendo dal caso ovvio della omotetia) le superficie suscettibili di rappresentazione geodetica sopra un'altra formano una classe estremamente limitata, quella della superficie di Liouville, caratterizzata dall'esistenza sulla superficie di un doppio sistema ortogonale ed *isotermo* di ellissi e iperbole geodetiche. L'altra Memoria sulla rappresentazione sferica contiene risultati di fondamentale importanza, in particolare quello, noto ora sotto il nome del Dini, che assegna la condizione necessaria e sufficiente perchè un doppio sistema di linee sulla sfera costituisca l'immagine delle asintotiche di una superficie, ed altri interessanti teoremi particolari.

Se nel seguito l'attività scientifica del Dini si volse, come vedremo, ad altri e più alti studî di pura analisi, Egli conservò sempre una predilezione per questo campo delle sue ricerche giovanili, e nelle lezioni universitarie, particolarmente nel corso di geodesia, amava svolgerne i primi principî, addestrandovi i suoi allievi e spronandoli alla ricerca.

Contemporaneamente agli ultimi studî accennati di geometria infinitesimale, il Dini ne compieva altri di algebra, ed anche in questo campo produceva importanti lavori. Le sue Memorie sulle serie a termini positivi e sui prodotti infiniti sono molto notevoli non solo per i nuovi resultati conseguiti, ma ben anche per il perfetto rigore della ricerca, inusitato a quei tempi, e che già dimostrava nel giovane autore quel singolare acume critico che doveva poi dominare le maggiori produzioni successive. Nuovi ed interessanti criterî di convergenza Egli aggiunse, che comprendevano come casi particolari e il teorema di Kummer e quasi tutti gli altri criterî prima noti, ed estese pure notevolmente il criterio di Gauss. E nella Memoria sui prodotti infiniti troviamo per la prima volta stabilite in una maniera rigorosa, che è sostanzialmente quella adoperata anche oggidì, le condizioni necessarie e sufficienti per la convergenza incondizionata.

Passiamo ora a parlare delle più alte ricerche compiute dal Dini nel campo dell'Analisi, ricerche che singolarmente accrebbero e consolidarono la fama del matematico italiano, collocandone il nome nella schiera dei nostri più illustri: Betti, Brioschi, Cremona, Beltrami e Casorati. Non essendo qui possibile seguire partitamente le numerose pubblicazioni ed i trattati che segnano le fasi dell'opera così vasta e sistematica compiuta dal Dini, nel rendere sicuri i fondamenti dell'analisi e portarne a maggiore altezza l'edificio, converrà limitarsi a indicare soltanto i criterî direttivi, che tale opera informarono, sino alle pubblicazioni delle litografie e dei libri, che ne riassumono e ne condensano gli importanti risultati e formano ancora oggi la guida più sicura per chi voglia approfondire gli studî d'analisi e trarne vigore per la ricerca originale.

Fino dal principio della sua carriera scientifica, come il Dini stesso racconta, Egli era stato colpito dall'osservare che alcuni principii fonda-

mentali dell'analisi apparivano mancanti, e negli enunciati e nelle dimostrazioni, di quell'assoluto rigore che deve esigersi nella matematica. Quanto tali dubbî fossero legittimi tutti ora sanno; ma allora, fra noi almeno, non erano stati formulati da alcuno ed occorreva il singolare acume del suo ingegno per vincere l'abitudine contratta alle dimostrazioni il più delle volte intuitive e scrutarne il fondamento logico.

Ben presto però, nel 1870-71, dalla lettura delle Memorie di Schwarz e di Heine, Egli apprese che tali dubbî ed altri maggiori erano stati sollevati nel cerchio dei matematici della Scuola di Weierstrass. Ma le pubblicazioni nel nuovo rigoroso indirizzo erano allora ben scarse e rischiaravano soltanto alcuni dei punti fondamentali, a seconda che lo richiedeva la particolare ricerca, e mancava ancora un'impresa sistematica per dare una perfetta sicurezza ai fondamenti e riedificare, sulle solide basi, tutto l'edificio dell'Analisi.

A questa ardua impresa si accinse appunto il Dini ed, in tempo relativamente breve, Egli raggiunse completamente lo scopo; sicchè, dopo avere esposto in successivi corsi universitarî i risultati dei suoi studî, poteva già, alla fine del 1877, raccoglierli e pubblicarli nel volume: *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali.*

Questo aureo libro conserva anche oggidì, dopo che i nuovi metodi rigorosi hanno ottenuto un così largo consenso e raggiunto il più ampio sviluppo, tutta l'importanza e l'interesse di un'opera classica ed originale. E, non solo in Italia, ma anche all'estero i *Fondamenti* del Dini vennero sempre più conosciuti ed apprezzati, tanto che, molto tempo dopo l'edizione originale, nel 1902, ne apparve una traduzione in tedesco.

L'esposizione di tutti i principii fondamentali dell'analisi contenuta in questo libro, i teoremi sulle funzioni continue e discontinue, sulle proprietà delle derivate e le condizioni di loro esistenza, sulle serie, sugli integrali definiti, in particolare gli importanti studî generali sui rapporti incrementali, con le nozioni introdotte degli estremi oscillatorî, contengono già quanto di più essenziale venne prodotto in seguito anche da altri, molte volte soltanto con nomi mutati.

Alla riforma così radicale compiuta nei fondamenti dell'analisi superiore doveva naturalmente corrispondere una altrettanto sistematica nella esposizione dell'ordinario corso di calcolo infinitesimale. E già nel 1877-78 il Dini, a cui tale insegnamento venne da allora affidato nell'Università di Pisa, dettò quelle celebri lezioni, riprodotte poi in seguito con poche varianti in litografia, nelle quali tutto il corso di calcolo infinitesimale veniva trasformato ed esposto secondo i nuovi rigorosi principî. Particolarmente notevoli per novità di risultato sono, nel calcolo differenziale, la teoria delle funzioni implicite esposta per la prima volta in modo rigoroso; la teoria dei massimi e minimi; le considerazioni sulla serie di Taylor, che già con-

tengono le idee sulle serie asintotiche da altri sviluppate in seguito: nel calcolo integrale si osservano particolarmente il capitolo sugli integrali definiti, gli studii generali sulle funzioni sempre finite o che crescono all'infinito, sulle funzioni dipendenti da altre variabili oltre quelle d'integrazione, gli studii sulla integrazione per serie, e molti altri argomenti di fondamentale interesse.

Da queste lezioni, sebbene riprodotte fino al 1907 solo in litografie, largamente attinsero italiani e stranieri, e si può ben dire che esse hanno servito e servono in larga misura, insieme coi *Fondamenti*, alla diffusione della coltura analitica moderna. Fu soltanto nel 1907 che il Dini si decise a pubblicare per le stampe queste sue lezioni, dapprima col proposito di riprodurre testualmente le antiche litografie, coll'aggiunta di poche note esplicative a pie' di pagina; ma in seguito, per necessità di cose, il piano primitivo venne modificato coll'aggiunta di nuovi ed interessanti capitoli, sicchè il trattato, ora compiuto in quattro volumi, non solo offre un'esposizione completa del calcolo infinitesimale e delle sue applicazioni geometriche, ma si spinge ancora più in là colla esposizione sommaria delle più recenti conquiste dell'analisi, inserita alla fine del quarto volume. Quivi un lungo capitolo, il XXXII, è dedicato alla moderna teoria delle equazioni integrali, con nuove ed interessanti vedute sulle equazioni così dette di prima specie, collegate ad un antico studio del Dini, su cui torneremo più oltre. In fine, nell'ultimo capitolo XXXIII, si trovano esposte le nuove idee sulle misure dei gruppi di punti o numeri, e le estensioni del concetto d'integrale secondo Lebesgue, Denjoy e Perron, che si subordinano ad altri infiniti modi di definizione di integrali, tutti collegati dal Dini ai concetti stessi di Riemann.

Ritornando all'analisi superiore, dobbiamo ancora dire degli studî del Dini, forse ancora più importanti per originalità, sugli sviluppi in serie, che tanto interessano l'analisi e la fisica matematica. Anche questi studî, nei quali spiccano egualmente la forza inventiva e l'acume critico dell'autore, rimontano ad epoca relativamente antica, e vennero raccolti e pubblicati dal Dini nel 1880 nel bel volume: *Serie di Fourier ed altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale.* Ai più celebri di questi sviluppi in serie di Fourier, di funzioni sferiche, di funzioni di Bessel, altri innumerevoli ne aggiungono l'analisi e la fisica matematica; ma per la maggior parte di essi l'effettiva sviluppabilità era posta soltanto formalmente, ed anche per altri più noti, ove la validità era rigorosamente assicurata, le condizioni si presentavano alquanto restrittive; e mancava inoltre una deduzione uniforme, che tutti li facesse derivare da un'unica sorgente. Il Dini rinvenne un procedimento generale ed uniforme, che non solo gli permise di stabilire in modo generale e rigoroso la validità di tutti questi sviluppi, ma ancora di allargarne estremamente il campo, raggiungendo una generalità grandissima e non più eguagliata, nonchè superata, da altri.

A questo primo volume, concernente soltanto la possibilità degli sviluppi, doveva far seguito un secondo di eguale interesse, contenente gli studî, già in parte compiuti, intorno alle proprietà degli sviluppi medesimi, alla convergenza in egual grado, alla integrabilità e differenziabilità ed alla questione dell'unicità. Ma, impedito da cure di ben diversa natura, il Dini non potè mai pubblicare per intero questo secondo volume, e solo ne fece uscire, nello stesso anno 1880, negli Annali delle Università Toscane, pochi fascicoli, che già pronti per la tiratura vennero malauguratamente distrutti, salvo le poche copie distribuite ad amici e studenti. In questi fascicoli trovasi quella formola d'inversione d'integrali definiti, più generale di una formola d'Abel, colla quale il Dini veniva a considerare un nuovo caso di quelle che ora si dicono equazioni integrali di prima specie a nucleo singolare.

Così, già fin dal 1880, il Dini era portato dalle sue ricerche, interrotte di poi per lungo tempo, ben vicino al nuovo e fecondo campo delle equazioni integrali, che le ricerche fondamentali del Volterra e del Fredholm dovevano poi conquistare all'Analisi. Molto più tardi, nel 1903-1904, il Dini ritornò su questi studî in un corso di lezioni d'analisi superiore, e trattò in generale degli sviluppi di funzioni arbitrarie in serie di soluzioni di equazioni differenziali lineari del secondo ordine. Tali sviluppi, dopo i nuovi metodi creati dalla teoria delle equazioni integrali, hanno attratto l'interesse e le ricerche dei matematici; ma anche i nuovi sussidii non conferiscono a quegli sviluppi tutto il campo di validità che viene loro assicurato dai procedimenti del Dini. Questi studî furono poi pubblicati per litografie nel 1911 in un interessantissimo corso di lezioni, che insieme riproduce i risultati prima destinati al secondo volume della *Serie di Fourier*.

A queste opere maggiori fanno degna corona numerose altre pubblicazioni, quali preparatorie quali di aggiunta, come gli interessanti studî sulle equazioni differenziali lineari, esposti dal 1878 in poi negli Annali di matematica, e le altre sulle equazioni a derivate parziali nelle Memorie dei Lincei e negli Acta Mathematica. Ed anche, infine, nel campo della teoria delle funzioni di variabile complessa, produsse il Dini importanti lavori. Spiccano fra questi la Memoria pubblicata nelle *Collectanea in memoriam D. Chelini* (1881), nella quale, insieme con altri risultati, è già stabilita una parte del teorema che rese poi celebre il nome di Mittag-Leffler, le eleganti applicazioni della teoria dei residui negli Annali di matematica (1878), gli antichi studi del 1870 *Sopra le funzioni di variabile complessa* nel tomo IV degli Annali, e le ricerche sul problema di Dirichlet, in particolare pel caso di un anello circolare, problema su cui ritornò nel 1913 nel tomo 36 dei Rendiconti del Circolo matematico di Palermo.

L'alto valore di questa produzione scientifica del Dini, che rapidamente abbiamo qui passato in rassegna, ne colloca il nome fra quelli dei nostri

sommi. Che se, per seguire la classificazione dei matematici nelle due schiere, di cui parla Poincarè, dei *logici* e degli *intuitivi* fossimo tentati, per la natura dei suoi principali lavori, di attribuirlo piuttosto alla prima, vediamo però che Egli entra, con egual diritto, nella seconda, come del resto necessariamente accade per ogni mente matematica di primo ordine. Ci auguriamo che le Memorie matematiche del Dini, come quelle dei suoi predecessori: Brioschi, Betti, Cremona e Beltrami, possano venire raccolte in volumi di opere complete, a facile uso degli studiosi, e quale degno omaggio a chi tanto contribuì a tenere alto il nome della scienza italiana.

Ad una così elevata e feconda attività nella ricerca matematica il Dini congiunse l'altra, in egual grado importante, di insegnante impareggiabile. In 52 anni di ininterrotto insegnamento venne da Lui istruita ed educata una innumerevole schiera di giovani, quali avviati poi per la ricerca scientifica e per la scuola, nei suoi diversi gradi, quali per l'ingegneria. E può bene affermarsi che nessuno fra i tanti alunni potrà mai dimenticare la semplice e luminosa parola del maestro, sotto il cui fascino le idee più astruse diventavano facili ed accessibili; e ciascuno, pari alla gratitudine per l'insigne maestro, conserverà sempre il memore affetto per la sua paterna bontà.

Non è qui il luogo di ricordare, se non di sfuggita, quanta prodigiosa attività, oltre che per la scienza e per la scuola, abbia speso il Dini nei più alti uffici, nella Camera, al Senato, nel Consiglio Superiore della pubblica istruzione, dappertutto circondato dall'alta estimazione che il suo valore, la sua rettitudine e l'intenso amore pel pubblico bene seppero ovunque procurargli.

Nel prendere commiato da una così nobile figura di scienziato e di cittadino un pensiero ancora ci rende più dolorosa la sua dipartita.

A Lui, che fin dal principio della guerra di liberazione dei popoli civili contro la più criminale barbarie, riconobbe quale era la via segnata all'Italia dalla sua storia e dal diritto, e dichiarata la guerra contro il secolare nemico, ne seguì le tremende fasi, col cuore angosciato nei giorni tristi ma pur sempre animato dalla ferma fiducia nell'esito finale, non fu concesso di vedere se non i primi albori dell'auspicato trionfo. Pochi giorni dopo la sua morte erompeva da un capo all'altro d'Italia il grido di gioia e di entusiasmo per la grande decisiva vittoria, a cui doveva ben presto seguire lo sfacelo della coalizione nemica.

Egli non era più! Ma nei giorni lieti, che avviano la patria nostra verso più alti destini, rivolgiamo con tanto maggiore affetto e gratitudine il pensiero verso di Lui che ne fu uno dei figli più degni.

Onore alla memoria di Ulisse Dini e possa l'Italia produrre anche in futuro figli simili a Lui.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI DEL SEN. PROF. ULISSE DINI.

I°) Giornale di matematiche ad uso degli studenti delle Università Italiane (Napoli).

Vol. II. (1864). 1. « Sull'equazione differenziale delle superficie applicabili su di una superficie data », pag. 282.

Vol. III. (1865). 2. « Sulla teoria delle superficie », pag. 65.

3. « Sulle superficie di curvatura costante », pag. 241.

4. « Su alcune proprietà delle superficie rigate », pag. 281.

5. « Sulle superficie gobbe che possono essere rappresentate da un'equazione data a derivate parziali del second'ordine », pag. 321.

Vol. IV. (1866). 6. « Sulle superficie gobbe applicabili su quelle di rivoluzione e su alcune proprietà delle superficie gobbe delle normali principali di una curva », pag. 298.

7. « Sulle superficie gobbe che soddisfano a date equazioni alle derivate parziali del second'ordine », pag. 305.

Vol. VI. (1868). 8. « Sulle serie a termini positivi ».

II°) Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (Paris).

Vol. 60. (1865). 9. « Des surfaces à courbure constante nègative, et des surfaces applicables sur les surfaces à aire minima », pag. 340.

Vol. 61. (1865). 10. « Sur les surfaces gauches qui peuvent être rèpresentées par des équations à differences partielles du second ordre » pag. 1001.

III°) Memorie della Società Italiana delle Scienze. (Modena, Firenze, Napoli, Roma).

Vol. I. (1868). 11. « Sopra alcuni punti della teoria della superficie », pag. 17.

Vol. II. (1869-70) 12. « Ricerche sopra la teoria delle superficie », pag. 1.

13. « Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura sferiche », pag. 135.

IV°) Annali di Matematica pura ed applicata (Milano).

Serie I. Vol. VII. (1864). 14. « Sulle superficie nelle quali la somma dei due raggi di curvatura principale è costante », pag. 5.

15. « Sopra alcuni punti della teoria delle superficie applicabili », pag. 25.

16. « Sulle superficie gobbe nelle quali uno dei due raggi di curvatura principale è una funzione dell'altro », pag. 205.

Serie II. Vol. I. (1867-68). 17. « Sulle superficie le quali hanno le linee di curvatura piane », pag. 146.

Vol. II. (1868-69). 18. « Sui prodotti infiniti », pag. 28.

Vol. III. (1869-70). 19. « Sopra un problema che si presenta nella teoria generale delle rappresentazioni geografiche di una superficie su di un'altra », pag. 269.

Vol. IV. (1870-71). 20. « Sopra le funzioni di una variabile complessa », pag. 159.

21. « Sopra alcune formule generali della teoria delle superficie e loro applicazioni », pag. 175.

Serie II. Vol. V. (1871-73). 22. « Sull'integrazione dell'equazione $\Delta^2 u = 0$ », pagina 305.

Vol. VI. (1873-75). 23. « Sopra le serie di funzioni sferiche », pag. 112.
24. idem pag. 208.
25. « Sulla unicità degli sviluppi delle funzioni di una variabile in serie di funzioni X_n », pag. 216.

Vol. VIII. (1877). 26. « Su alcune funzioni che in tutto un intervallo non hanno mai derivata », pag. 121.
27. « Sulla rappresentazione di una superficie su di un'altra », 161.

Vol. X. (1880-82). 28. « Intorno agli sviluppi delle funzioni di una variabile reale per serie di funzioni Jacobiane », pag. 145.

Serie III. Vol. I. (1898). 29. « Un'applicazione della teoria dei residui delle funzioni di variabile complessa », pag. 39.
30. « Un teorema sui limiti superiori e inferiori dei moduli delle radici di un'equazione algebrica », pag. 77.

Vol. II. (1898). 31. « Studi sull'equazioni differenziali lineari », pagina 297.

Vol. III. (1899). 32. idem pag. 126.

Vol. IV. (1900). 33. « Eugenio Beltrami, cenno necrologico ed elenco dei suoi lavori », pag. 151.

Vol. XI. (1904). 34. « Studi sull'equazioni differenziali lineari », pagina 285.

Vol. XII. (1905). 35. « Studi sull'equazioni differenziali lineari e loro integrali normali », pag. 119.

Vol. XVII. (1910). 36. « Studi sull'equazioni differenziali lineari per riguardo ai loro integrali normali », pag. 259.

Vol. XVIII. (1911). 37. « Studi sull'equazioni differenziali lineari in relazione ai loro integrali normali pel caso di alcune equazioni di 2° ordine, Polinomi integrali », pag. 135.

Vol. XXVI (1917). 38. « Sugli sviluppi in serie

$$\frac{1}{\lambda}\alpha_0 + \sum_1^{\infty}(a_n \cos \lambda_n x + b_n \cos \lambda_n x)$$

dove le λ_n sono le radici dell'equazione trascendente $F(z)\cos \pi z + F_1(z) \operatorname{sen} \pi z = 0$. ».

V°) Annali delle Università Toscane (Pisa).

Vol. IX. (1867) 39. « Memoria sulle serie a termini positivi », pag. 44.
40. « Nota sulla Memoria precedente », pag. 77.

Vol. XI. (1869). 41. « Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane », pag. 5.
42. « Sopra alcune formule di geometria sferoidica », pag. 79.

Vol. XIV. (1874). 43. « Memoria sopra le serie di Fourier », pag. 161.

Vol. XVII. (1880). 44. « Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in certi intervalli » (tutto il volume).

VI°) Collectanea Mathematica (in memoriam Dominici Chelini), Hoepli MDCCCLXXXI.
45. « Alcuni teoremi sulle funzioni di una variabile complessa », pag. 258.

VII°) Acta mathematica (Stokholm).
Vol. XXV. (1902). 46. « Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre », pag. 185.

VIII°) Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (Palermo).
Vol. XVIII. (1904). 47. « Sugli integrali multipli in generale e su quelli che valgono per la rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali », pag. 318.
Vol. XXXVI. (1913). 48. « Il problema di Dirichlet in una area anulare e nello spazio compreso fra due sfere concentriche ». pag. 28.

IX°) Rendiconti delle sedute della R. Accademia dei Lincei (Roma).
Serie V. Vol. V. (1896, 2° sem.) 49. « Sulle equazioni alle derivate parziali di second'ordine », pag. 382.
50. « id. id. », pag. 421.
Vol. VI. (1897, 1° sem.). 51. « id. id. », pag. 5.
52. « id. id. », pag. 45.
Vol. VI. (1897, 2° sem.) 53. « Una applicazione notevole della teoria dei residui nelle funzioni di variabile complessa ».

X°) Atti della R. Accademia dei Lincei (Roma).
Serie II. Vol. II. (1875). 54. « Sulle funzioni potenziali dell'ellisse e dell'ellissoide ». 689.
Vol. III. (1876). 55. « Su di una funzione analoga a quella di Green », pag. 129.
Serie V. Vol. II. 56. « Un'applicazione della teoria dei residui delle funzioni di variabile complesse », pag. 495. (1897).
Vol. III. 57. « Sulle equazioni alle derivate parziali di second'ordine », pag. 33 (1899).
Vol. IV. 58. « Sopra una classe di equazioni a derivate parziali del second'ordine con un numero qualunque di variabili », pag. 121 (1901).
59 « Sopra una classe di equazioni a derivate parziali del second'ordine », pag. 431 (1902).
(Memoria postuma) 60. « Sul calcolo d'approssimazione degli integrali definiti », (Annali di matematica, 1919).

VOLUMI A STAMPA.

1°) « Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali », Pisa, T. Nistri e C., 1878.
2°) « Serie di Fourier e altre rappresentazioni analitiche delle funzioni di una variabile reale ». Pisa, T. Nistri e C, 1880.
3°) « Sugli sviluppi in serie per la rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale date arbitrariamente in un certo intervallo » (autografato). Pisa, Successori F. Nistri, 1911.
4°) « Lezioni di analisi infinitesimale », Volumi 4. Pisa, Succ. F. Nistri, 1907-1915.
5°) « Lezioni sulla teoria delle funzioni sferiche e delle funzioni di Bessel », (autografato). Pisa, T. A. Cesari 1912.

***

Prima che la Classe proceda alla elezione del suo Segretario e del suo Segretario aggiunto, essendo scaduti dalla loro carica gli attuali Accademici che tale carica rivestivano, il Presidente della Classe comunica una lettera del Segretario aggiunto B. Grassi, nella quale prega di essere dispensato dalla funzione fino ad ora tenuta, perchè le gravi sue occupazioni non gli permettono di esercitarla con la dovuta diligenza. Il Presidente, mentre esprime il suo dispiacere, che sa essere diviso dalla Classe, per detta deliberazione del nostro benemerito Socio, rammenta i grandi servigi che il nostro Collega rende alla patria e che pienamente giustificano le sue assenze da Roma, per le quali egli credette opportuno di pregare i Colleghi di dispensarlo dalla carica di Segretario aggiunto. Dopo di che si passa alla votazione, e il risultato è il seguente:

Votanti 13: Per la elezione del Segretario, Millosevich E. ebbe voti 12; Reina V., 1. — Eletto Millosevich (riconferma).

Per la elezione del Segretario aggiunto, Reina V. ebbe voti 11; Castelnuovo G., 1. — Eletto Reina.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando le seguenti: del Socio Taramelli, *La geologia e la pace — Una proposta riguardo al M. Grappa*; del Corrisp. Pascal, *Commemorazione di Ulisse Dini*; del Corrisp. Marcolongo, *Il problema dei tre corpi da Newton ai nostri giorni*; e varî opuscoli del Corrisp. Silvestri su insetti esotici (Africa, America). Fa inoltre particolare menzione dei tomi 1° e 2° delle opere del Socio straniero G. H. Halphen, trasmesse con una cortesissima lettera dalla moglie e dalla figlia del defunto Accademico, lettera di cui il Segretario dà comunicazione, aggiungendo che la pubblicazione delle opere dell'Halphen venne curata dai signori Jordan, Poincarè, Picard e Vessich. Finalmente il Segretario Millosevich fa menzione del vol. XVI del *Catalogue of scientific Papers, IV Series (1884-1900)*.

Il Socio Pirotta fa omaggio a nome del Socio Mattirolo della pubblicazione di quest'ultimo, intitolata: *Phytoalimurgia Pedemontana, ossia Censimento delle specie vegetali alimentari della Flora spontanea del Piemonte*, della quale parla, mettendo in rilievo la importanza che avrebbe uno studio della stessa natura, che fosse fatto per tutte le regioni d'Italia. Presenta inoltre, dandone notizia, una Memoria a stampa del prof. De Angelis d'Ossat, la quale è la 27ª di quelle riguardanti le applicazioni della geologia

dello stesso autore, che tratta dei *Rapporti tra le formazioni geologiche e la composizione del terreno agrario nella Campagna romana.*

Il Socio Reina presenta il Bullettino del Comitato glaciologico pubblicato dalla Società italiana per il progresso delle scienze, e parla degli studî sui ghiacciai contenuti nel Bullettino stesso, dei signori Sacco, Monterin, Reina, Somigliana, Porro. Presenta poi un fascicolo contenente la *Differenza di longitudine fra Roma* (*M. Mario*) *e Napoli* (*Osservatorio di Capodimonte*) *determinata nei mesi di giugno e luglio del 1906*, da Bianchi, Castarino, Nobile e Zappa.

Il Socio Volterra offre la pubblicazione del prof. Colonnetti intitolata: *Proiettili*, e ne discorre, occupandosi specialmente delle parti di carattere scientifico della pubblicazione stessa.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario Millosevich comunica l'elenco dei concorrenti ai seguenti concorsi a premî scaduti col 1918:

Elenco dei lavori
presentati ai concorsi ai premi del Ministero della Pubblica Istruzione
per le *Scienze matematiche.*

(Scadenza 31 dicembre 1918. — Due premi di L. 2000 ciascuno).

1. Aprile Giorgio. 1) « Di una ipersuperficie dell' S_4, d'ordine sei con infinite quadriche » (st.). — 2) « Su due complessi dirette, dell' S_4, d'odine due e della terza specie » (st.). — 3) « Di una trasformazione doppia nello spazio a quattro dimensioni » (st.).

2. Bottasso Matteo. 1) « Teoremi su massimi e minimi geometrici, e su normali a curve e superficie » (st.). — 2) « Sulle trasformazioni asintotiche delle curve » (st.). — « Generalizzazione della trasformazione di Combescure per le curve » (st.). — 4) « Alcune formule sulle superficie applicabili » (st.). — 5) Problemi sulla determinazione delle linee sghembe » (st.). — 6) « Sulle rigate sviluppabili per una linea e per le sue trasformate di Combescure » (st.).

3. Maccaferri Eugenio. 1) « Calcolo numerico approssimato » (st.). — 2) Approssimazioni numeriche: prodotto » (st.). — 3) « Approssimazioni numeriche: moltiplicazione abbreviata e moltiplicazione ordinata » (st.). — 4) Approssimazioni numeriche: quoziente » (st.). — 5) « Approssimazioni numeriche: divisione abbreviata e divisione ordinata » (st.). — 6) Frammenti sulla teoria delle probabilità » (ms.).

4. Nalli Pia. 1) « Sulla sommabilità della serie, con particolare riguardo alle serie di Dirichlet » (st.). — 2) « Sopra una relazione fra la

teoria della composizione di prima specie e lo studio delle serie divergenti » (st.). — 3) « Sopra un'applicazione della convergenza in media » (st.), — 4) « Sulle equazioni integrali » (st.).

5. Tanturri Alberto. 1) « Radici di numeri approssimati ed estrazione abbreviata della radice quadrata » (st.). — 2) « Della partizione dei numeri » (st.). — 3) Sui prodotti infiniti $(l-x)\,(l-x^2)\ldots$ e $(l+x)\,(l+x^2)\,(l+x^3)$ » (st.). — 4) Sul numero delle partizioni d'un numero in potenze di 2. Nota I e II » (st.).

6. Usai Giuseppe. 1) « Sul calcolo delle variazioni e sulle equazioni di Eulero » (st.). — 2) Osservazioni e aggiunte ad una mia pubblicazione sul calcolo delle variazioni » (st.). — 3) « Una questione di analisi combinatoria » (st.). — 4) « Le funzione di lame dei primi 12 gradi » (st.). — 5) « Sopra un'equazione integrale » (st.). — 6) « Una generalizzazione della lemniscata di Bemoulli » (st.) — 7) « Sul calcolo delle variazioni per il caso delle derivate quarte » (ms.).

7. Vergerio Attilio. 1) « Sulle equazioni integrali del tipo Fredholm » (st.). — 2) « Sulla rappresentazione delle funzioni continue mediante serie di funzioni ortogonali » (st.). — 3) « Sulla derivazione per serie » (st.). — 4) « Sulle equazioni integrali di prima specie a nucleo non simmetrico » (st.). — 5) « Un'applicazione del metodo di sommazione di Borel per le serie alla risoluzione delle equazioni integrali » (st.).

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 1° dicembre 1918.

Abenbéder — Compendio de álgebra. Texto árabe, traducción y estudio por José A. Sánchez Pérez. Madrid, 1916. 8°. pp. I-XLIII, 1-117.

Agamennone G. — Sul periodo sismico dei monti Albani nel febbraio 1906. (Estr. dal « Bollettino della Società sismologica italiana », vol. XXI, pp. 1-57). Modena, 1918. 8°.

Bianchi E. — Differenza di longitudine fra Roma (M. Mario) e Napoli (Osservatorio di Capodimonte) determinata nei mesi di giugno e luglio 1900. Roma, 1918. 4°, pp. 1 57.

Bollettino del Comitato glaciologico italiano (Società italiana per il progresso delle scienze). Roma, 1919. 8°, pp. 1-190.

Canavari M. — Descrizione di un notevole esemplare di *Ptychodus* Agassiz trovato nel calcare bianco della creta superiore di Gallio nei Sette Comuni (Veneto). (Estr. dalla « Palaeontographia Italica », vol. XXII, pp. 35-102, tav. V-XIV). Pisa, 1916. 4°.

Colonnetti G. — Proiettili. Milano, 1918. 4°. pp. I-XI; 1-115.

Contarina F. — Differenza di longitudine fra Roma (M. Mario) e Napoli (Osservatorio di Capodimonte) determinata nei mesi di giugno e luglio 1900. Roma, 1918. 4°, pp. 1-57.

De Angelis d'Ossat G. — Rapporti fra le formazioni geologiche e la composizione del terreno agrario nella campagna romana. (Estr. dal « Bollettino della Società geologica italiana », vol. XXXVII, pp. 29-51). Roma, 1918. 8°.

De Toni G. B. — In memoria del Socio prof. Giulio Camus (1847-1917). (Estr. dalle « Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti », vol. XIII, pp. 1-13). Modena, 1918. 4°.

Halphen G. H. — Oeuvres publiées par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, É. Picard avec la collaboration de E. Vessiot. Tome I, II. Paris, 1916-18. 8°, pp. I-XLIII, 1-568; I-VII, 1-560.

Jungersen H. F. C. — Chordeuma obesum a new parasitic copepod endoparasitic in Asteronyx loveni m. tr. Kobenhavn, 1914. 8°, pp. 1-18.

Jungersen H. F. G. — The Alcyonaria of Eastgreenland (Danmark Ekspeditionen til Gronlands; Bind III. Kobenhaon, 1916. 8°. pp. 487-503).

Limé (von) C. — Bref och Skrifvelser. Afd. I, Del 7. Upsala, 1917, 8°, pp. 1-192.

Marcolongo R. — Il problema dei tre corpi da Newton ai nostri giorni (Manuali Hoepli, nn. 403-405). Milano, 1919, 12, pp. 1-166.

Mattirolo O. — Phytoalimurgia Pedemontana ossia censimento delle specie vegetali alimentari della Flora spontanea del Piemonte (Estr. dagli « Annali della R. Accademia d'agricoltura di Torino », vol. LXI, pp. 1-180). Torino, 1918. 8°.

Nobile V. — Differenza di longitudine fra Roma (M. Mario) e Napoli (Osservatorio di Capodimonte) determinata nei mesi di giugno e luglio 1909. Roma, 1918, 4°. pp. 1-57.

Pascal E. — Il senatore Ulisse Dini. Cenno commemorativo letto dal Socio Ernesto Pascal nella seduta del 2 novembre 1918 (Estr. dal « Rendiconto della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli », vol. XXIV, pp. 1-4). Napoli, 1918. 8°.

Rabbem G. — Nota sulla coincidenza della velocità teorica nella sezione contratta di una vena gassosa effluente da una luce in parete sottile, per un salto di pressione superante il rapporto carat-

teristico, con la velocità di propagazione del suono nel gas stesso preso allo stato fisico che ha nella sezione contratta anzidetta. Torino, 1918, 8°. foll.

Roccati A. — Campagna glaciologica nelle alpi Marittime durante l'estate 1915 (Estr. dal « Bollettino del comitato glaciologico italiano », pp. 1-10). Roma, 1917. 8°.

Roccati A. — Il bacino della Beonia ed il massiccio del Monte Bego (Alpi Marittime). (Estr. dagli « Atti della Società italiana di Scienze naturali », vol. LV, pp. 1-67). Pavia, 1916. 8°.

Roccati A. — Il glacialismo nelle Alpi marittime (Estr. dalla « Rivista del Club Alpino italiano », vol. XXXV, pp. 1-14). Torino, 1916. 8°.

Roccati A. — Ricerche lito-mineralogiche sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino » vol. LI, pp. 1-20). Torino, 1916. 8°.

Ruggeri V. G. — Unicità del *philum* umano con pluralità dei centri specifici (Estr. dalla « Rivista italiana di Paleontologia », anno XXIV, pp. 1-15). Perugia, 1918. 8°.

Russo A. — La funzione di assorbimento e di secrezione interna nelle cellule della granulosa del follicolo di Graaf della coniglia, la degenerazione grassa ed il ciclo vitale dell'ovo (Estr. dagli « Atti dell'Accad. Gioenia di scienze naturali in Catania », vol. XI, pp. 1-21). Catania, 1918. 4°.

Silvestri F. — Contribuzione alla conoscenza dei Termitidi e Termitofili dell'Africa occidentale (Estr. dal « Bollettino del laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. XII, pp. 287-346). Portici, 1918. 8°.

Silvestri F. — Descrizione di due nuovi generi di *Geophilidae* (Chilopoda) del Messico (Estr. dal « Bollettino del laboratorio di Zoologia generale e agraria dellaR. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. XII, pp. 362-358). Portici, 1918. 8°.

Silvestri F. — Thysanura in Voyage de Ch. Alluaud et R. Jeannel en Afrique orientale (1911-1912). Résultats scientifiques, Aptérygogenea. Paris, 1918. 8°, pp. 1-28.

Silvestri F. — Un genere e due nuove specie di Calotermitidi (Insecta Isoptera) dell'Eritrea (Africa or.) (Estr. dal « Bollettino del laboratorio di Zoologia generale e agraria della R. Scuola superiore d'agricoltura in Portici », vol. XII, pp. 347-351). Portici, 1918. 8°.

Taramelli T. — La geologia e la pace. (Estr. dai « Rendiconti del Reale Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. LI, pp. 1-7). Milano, 1918. 8°.

Taramelli T. — Una proposta riguardo al M. Grappa (Estr. dei « Rendiconti del Reale Istituto lombardo di scienze e lettere », vol. LI, pp. 680-682). Milano, 1918. 8°.

Zappa G. — Differenza di longitudine fra Roma (M. Mario) e Napoli (Osservatorio di Capodimonte) determinata nei mesi di giugno e luglio 1909. Roma, 1918. 4°, pp. 1-57.